IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Facoltà di Scienze — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 30 Aprile 2002 Traccia delle soluzioni

Soluzione dell'esercizio n. 1

Per dimostrare il teorema di Menelao conviene tracciare dai tre vertici del triangolo A, B, C, tre segmenti paralleli AM, BL, CN che intersecano la retta C_1B_1 nei punti L, M, N, come in figura. Consideriamo i due triangoli AMB_1 e CNB_1; essi sono simili, avendo i tre angoli rispettivamente uguali e quindi tra i lati vale la seguente proporzione:

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AM}{CN}$$

Analogamente, i triangoli CNA_1 e BLA_1 sono simili avendo i tre angoli rispettivamente uguali e quindi tra i lati vale la seguente proporzione:

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{CN}{BL}$$

Infine anche i triangoli BLC_1 e AMC_1 sono simili, avendo i tre angoli rispettivamente uguali, e quindi tra i lati vale la seguente proporzione:

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BL}{AM}$$

Moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze si prova il teorema.

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AM}{CN} \cdot \frac{CN}{BL} \cdot \frac{BL}{AM} = 1$$

Per calcolare il rapporto tra le aree dei due triangoli ABP e PBC, conviene applicare il teorema di Menelao al triangolo ACD intersecata dalla secante BP. Otteniamo

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{AK} = 1$$

Da cui segue

$$\frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}$$

Ma questo è anche il rapporto tra le aree dei due triangoli, avendo essi la stessa altezza rispetto alle basi AP e PC.

Soluzione dell'esercizio n. 2

Indichiamo con d la distanza tra il centro del pianeta ed il centro del satellite; indichiamo inoltre con μ la massa del sasso che consideriamo posto nel punto d'intersezione della superficie del satellite con la congiungente il centro del satellite con il centro del pianeta.

Osserviamo che la massa del satellite è molto minore della massa del pianeta, e quindi, in prima approssimazione, il baricentro del sistema coincide con il centro del pianeta. Osserviamo anche che, poiché il satellite volge sempre la stessa faccia verso il pianeta, il sasso descrive una traettoria circolare con la stessa velocità angolare ω del satellite.

Indichiamo inoltre il versore che individua la direzione che va dal centro del pianeta al centro del satellite con $\hat{r}$.

Le forze che agiscono sul sasso sono:

- la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal satellite,

$$\vec{F}_s = G\frac{m\mu}{a^2}\hat{r}$$

- la forza di reazione vincolare esercitata dal suolo del satellite

$$\vec{F}_r = -F_r\hat{r}$$

- la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal pianeta,

$$\vec{F}_p = -G\frac{M\mu}{(d-a)^2}\hat{r}$$

La somma di queste tre forze è uguale alla forza centripeta che fa muovere il sasso lungo la traettoria circolare:

$$\vec{F_c} = -\mu\omega^2(d-a)\hat{r}$$

Proiettando sulla direzione individuata dal versore $\hat{r}$ abbiamo la seguente equazione:

$$G\frac{m\mu}{a^2} - F_r - G\frac{M\mu}{(d-a)^2} = -\mu\omega^2(d-a)$$

La condizione per determinare la distanza critica al di sotto della quale il sasso si libra sul satellite è data dall'annullarsi della forza di reazione vincolare F_r. In tal modo otteniamo:

$$G\frac{m\mu}{a^2} - G\frac{M\mu}{(d-a)^2} = -\mu\omega^2(d-a)$$

Semplificando si ottiene:

$$G\frac{m}{a^2} - G\frac{M}{(d-a)^2} = -\omega^2(d-a) \qquad (*)$$

che permette di calcolare la distanza d in funzione della velocità angolare ω e dei parametri noti. Per determinare ω basta osservare che alla distanza critica tale è anche la velocità angolare del satellite, per cui:

$$G\frac{M\,m}{d^2} = m\omega^2 d$$

da cui segue

$$\omega^2 = G\frac{M}{d^3}$$

che sostituita nell'equazione $(*)$ dà l'equazione

$$G\frac{m}{a^2} - G\frac{M}{(d-a)^2} = -G\frac{M}{d^3}(d-a)$$

Semplificando si ottiene

$$\frac{m}{a^2} - \frac{M}{(d-a)^2} = -\frac{M}{d^3}(d-a)$$

$$m\,d^3(d-a)^2 = M\,a^2[d^3-(d-a)^3]$$
$$m\,d^3(d-a)^2 = M\,a^2[3a\,d^2-3a^2d+a^3]$$

Dividendo primo e secondo membro per d^2 otteniamo:

$$m\,d^2\left(1-\frac{a}{d}\right)^2 = M\,a^3\left[3-3\frac{a}{d}+\frac{a^2}{d^2}\right]$$

Riconoscendo che il raggio a del satellite è molto minore della distanza d tra il pianeta ed il satellite, possiamo trascurare il rapporto $\frac{a}{d}$ rispetto ad 1, ottenendo infine

$$d = a\sqrt[3]{\frac{3M}{m}}$$

Soluzione dell'esercizio n. 3

L'ultima cifra del numero cercato, che è una potenza di due, deve essere necessariamente pari, e quindi può assumere uno dei seguenti quattro valori: 2, 4, 6, 8. Non può essere uguale a zero perché altrimenti il numero sarebbe divisibile anche per 5, ed una potenza di due non può essere divisibile per cinque. Conviene allora osservare la struttura dell'ultima cifra nella sequenza delle prime potenze di 2:

$$2^1=2 \qquad 2^2=4 \qquad 2^3=8 \qquad 2^4=16 \qquad 2^5=32$$
$$2^6=64 \qquad 2^7=128 \qquad 2^8=256 \qquad 2^9=512 \qquad \ldots$$

Si vede che la sequenza con cui compaiono i possibili valori dell'ultima cifra è ciclica, con periodo 4, e nell'ordine compaiono le cifre 2, 4, 8, 6. Dividendo allora l'esponente per 4 e calcolando il resto, si ottiene la seguente regola di corrispondenza:

- se la divisione dell'esponente per 4 dà resto 0, l'ultima cifra è 6;
- se la divisione dell'esponente per 4 dà resto 1, l'ultima cifra è 2;
- se la divisione dell'esponente per 4 dà resto 2, l'ultima cifra è 4;
- se la divisione dell'esponente per 4 dà resto 3, l'ultima cifra è 8.

Nel caso proposto dall'esercizio, dividendo 99.999 per 4 si ottiene come resto 3 e quindi l'ultima cifra 8.

Soluzione dell'esercizio n. 4