IIASS

International Institute for Advanced Scientific Studies

"E.R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica

Facoltá di Scienze - Universitá di Salerno

PREMIO

EDUARDO R. CAIANIELLO

per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 21 Marzo, 2003

Soluzioni

Esercizio N. 1

Poiché si assume che il gas é perfetto, allora é possibile utilizzare l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT \tag{1}$$

dove n è il numero di moli di ossigeno presente nel cilindro. Nello stato iniziale, la studentessa trova che

$$p_1 = \frac{Mg}{S} + p_0\,, \quad V_1 = Sh_0\,, \quad n = \frac{m}{\mu} \tag{2}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica, h_0 indica la posizione di equilibrio iniziale del pistone, M è la massa del pistone, $\mu = 32$ gr è il peso molecolare dell'ossigeno e m é la massa del gas espressa in grammi. Possiamo perciò esprimere la temperatura iniziale in funzione dell'altezza h_0

$$T = \left(\frac{Mg}{S} + p_0\right)\frac{Sh_0}{R}\frac{\mu}{m} \tag{3}$$

Nello stato finale la pressione p_0 dell'ambiente è la stessa (vedi punto 4); la temperatura del gas nelle condizioni di equilibrio termodinamico è uguale a quello dell'ambiente, essendo il cilindro un ottimo conduttore, mentre l'aumentata pressione $p_2 = \frac{(M+M')g}{S} + p_0$ riduce l'altezza del pistone al valore $h_0 - \Delta h$. M' rappresenta la massa del pezzo di piombo. Nello stato finale la temperatura T può essere espressa da:

$$T = \left[\frac{(M + M')g}{S} + p_0 \right] \frac{S(h_0 - \Delta h)}{R} \frac{\mu}{m} \tag{4}$$

Eguagliando le eqs. (3) e (4) si ottiene

$$\frac{M + M' + \frac{p_0 S}{g}}{M + \frac{p_0 S}{g}} \frac{h_0 - \Delta h}{h_0} = 1 \tag{5}$$

da cui si ricava l'altezza iniziale del pistone

$$h_0 = \Delta h \frac{M + M' + \dfrac{p_0 S}{g}}{M'} \tag{6}$$

Questo permette di determinare con l'equazione (3) la temperatura T dell'ambiente. Per i valori numerici dati nel problema si ha:

$$V_{in} = 80.8 \times 10^3 cm^3 \,, \quad V_{in} = S(h_0 - \Delta h) = 75.8 \times 10^3 cm^3$$

$$\rho_{in} = 1.58 \times 10^{-3} \frac{g}{cm^3} \,, \quad \rho_{fin} = 1.69 \times 10^{-3} \frac{g}{cm^3}$$

$$T = 295K = 22°C$$

Esercizio N. 2

Le forze che si esercitano tra l'uomo e la palla al momento del lancio sono interne al sistema piattaforma-uomo-palla. Pertanto si conserva il momento angolare del sistema rispetto al polo O. Essendo il sistema inizialmente in quiete, il momento angolare totale (L_0) rimane nullo. Quando la palla viene lanciata con velocitá $\mathbf{v}_0$, la piattaforma inizia a ruotare con velocitá angolare ω e l'uomo, solidale con essa sul suo perimetro, ha velocitá periferica $v_p = \omega R$. Il momento angolare complessivo del sistema é

$$L_f = m v_0 R \cos\alpha + I\omega + M_2 \omega R^2 = m v_0 R \cos\alpha + \frac{1}{2}(M_1 + 2M_2)\omega R^2$$

Poiché $L_f = L_0 = 0$, si ottiene la velocitá angolare

$$\omega = -\frac{2 m v_0 \cos\alpha}{(M_1 + 2M_2)R}$$

Il segno meno indica che, in riferimento alla Figura, la piattaforma ruota in senso orario.

Esercizio N. 3

Basta ricordare che un numero é divisibile per 11 se la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e quelle di posto dispari é uguale a zero o ad un multiplo di 11. $1 + (3^{11})$ é sicuramente un numero pari, poiché la potenza (3^{11}) é un numero dispari (ogni potenza di tre é un numero dispari). Pertanto il nostro numero ha un numero pari di cifre e quindi vi sono tanti posti pari quanti quelli dispari; la differenza della somma delle cifre di posto pari e di posto dispari è zero e quindi il numero è divisibile per 11.

Esercizio N. 4

Poiché $X^5 + Y^5$ é divisibile per $X + Y$ eseguiamo la divisione fra i due polinomi, ottenendo:

$$\frac{X^5 + Y^5}{X + Y} = X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4$$

da cui risulta che possiamo scrivere:

$$X^5 + Y^5 = (X + Y)(X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4)\,,$$

ma sostituendovi i valori che abbiamo (cioé $X^5 + Y^5 \equiv B = 762500$ e $X + Y \equiv A = 20$), otteniamo:

$$B = A(X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4),$$

che riscriviamo:

$$X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4 = \frac{B}{A} \tag{7}$$

Dalla relazione

$$(X + Y)^4 = X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^2 + Y^4$$

otteniamo

$$X^4 + Y^4 = (X + Y)^4 - 4X^3Y - 6X^2Y^2 - 4XY^3$$

che sostituita nella (7) da':

$$(X + Y)^4 - 5X^3Y - 5X^2Y^2 - 5XY^3 = \frac{B}{A}$$

ossia

$$5(XY)^2 - 5A^2XY + A^4 - \frac{B}{A} = 0.$$

L'equazione e' di secondo grado in XY e puó essere risolta facilmente:

$$XY = \frac{5A^2 \pm \sqrt{5A^2 + 20B/A}}{10}$$

Sostituendovi $A = 20$ e $B = 762500$ otteniamo le soluzioni

$$XY = 325\,, \qquad XY = 75$$

La prima soluzione é da scartare perché porta a valori di X e Y complessi coniugati. La seconda é messa a sistema con l'equazione $X + Y = 20$:

$$\begin{aligned} XY &= 75 \\ X + Y &= 20 \end{aligned} \tag{8}$$

da cui consegue $X = 15, Y = 5$ oppure $X = 5, Y = 15$ (che rispecchia la simmetria $X \leftrightarrow Y$). In definitiva

$$X^4 + Y^4 = 51250$$