

IIASS

International Institute for Advanced Scientific Studies
"E.R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello" - Università di Salerno

PREMIO

EDUARDO R. CAIANIELLO

per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 16 Marzo, 2004

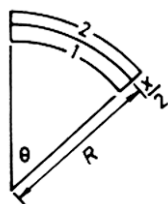
Soluzione del Problema N. 1

Se le due parti della lamina bimetallica fossero separate, l'incremento di temperatura ΔT le allungherebbe rispettivamente a:

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T)$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T)$$

Ma le due lamine sono saldate, e per rendere compatibile i differenti allungamenti, la lamina bimetallica s'incurva, con il centro di curvatura dalla parte della lamina n. 1, che subisce il minore allungamento. Infatti con tale configurazione, fissato l'angolo θ , la lunghezza dell'arco descritto da ciascuna sezione longitudinale della lamina bimetallica è funzione linearmente crescente della distanza dal centro.



La sezione longitudinale centrale di ciascuna delle due lamine mantiene inalterata la sua lunghezza, quando incurvata, per cui la lunghezza dell'arco della lamina bimetallica posizionata a distanza $R - \frac{x}{4}$ è $l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T)$ e la lunghezza dell'arco della lamina bimetallica posizionata a distanza $R + \frac{x}{4}$ è $l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T)$. Pertanto risulta:

$$\left(R - \frac{x}{4}\right) \theta = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T)$$

$$\left(R + \frac{x}{4}\right)\theta = l_0(1 + \alpha_2\Delta T)$$

Abbiamo così scritto due equazioni nelle due incognite θ ed R . Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$\frac{x}{2}\theta = l_0(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T$$

da cui segue che:

$$\theta = \frac{2l_0}{x}(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$2R\theta = l_0[2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T]$$

Sostituendo in quest'equazione il valore di θ appena trovato, otteniamo:

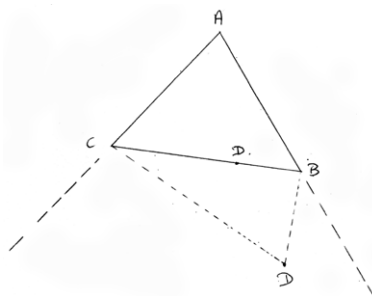
$$R = \frac{x}{4} \frac{[2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T]}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}$$

Notiamo che il raggio di curvatura tende a ∞ per $\alpha_2 - \alpha_1 \rightarrow 0$, com'è giusto che sia perché se le due parti della lamina bimetallica hanno lo stesso coefficiente di dilatazione, essa non s'incurva.

Soluzione del Problema N. 2

Premesso che ogni buona dimostrazione è valida, faremo una dimostrazione per costruzione, mostrando che, assegnata una configurazione sfavorevole di quattro punti nel piano, formanti un quadrilatero concavo, l'inserimento del quinto punto permette sempre di tracciare un quadrilatero convesso.

La proprietà che utilizzeremo è individuata dal seguente lemma: dato un triangolo qualunque ABC, consideriamo la regione illimitata π_1 di piano compresa tra il lato BC ed i prolungamenti dei lati AB ed AC, come in figura 1.



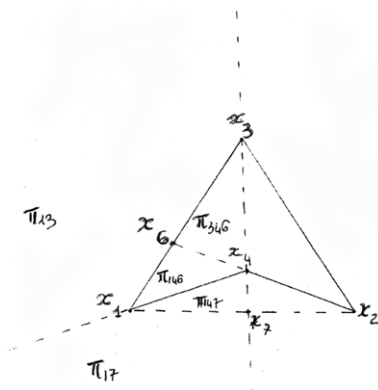
Sia D un punto interno al lato BC e spostiamo ad arbitrio il punto D nella regione π_1 , variando secondo necessità la lunghezza dei segmenti BD e DC. Allora il triangolo ABC viene trasformato in un quadrilatero ABDC che risulta sempre convesso, qualunque sia la posizione del punto D nella regione illimitata π_1 . Questo lemma si dimostra osservando che l'angolo $B\hat{A}C$

è minore di π per costruzione, essendo l'angolo interno di un triangolo, e che gli angoli interni del quadrilatero $B\hat{D}C$, $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ sono anch'essi per costruzione minori di π per ogni posizione del punto D interno alla regione π_1 .

Osserviamo che la limitazione alla regione π_1 è fondamentale, poiché se il punto D esce al di fuori di detta regione il quadrilatero può diventare concavo.

Chiamiamo T questa trasformazione che permette di generare un quadrilatero convesso a partire da un triangolo.

Consideriamo ora il caso sfavorevole in cui i quattro punti $x_1x_2x_3x_4$ costituiscono i vertici di un quadrilatero concavo, come in figura. Tracciamo la retta x_3x_4 ; questa divide il piano in due semipiani, π_1 in cui cade il vertice x_1 , e π_2 in cui cade il vertice x_2 , e divide il quadrilatero concavo in due triangoli.



Osserviamo che per simmetria possiamo limitarci a studiare il caso in cui il punto x_5 cade in uno dei semipiani, per esempio in π_1 .

Osserviamo anche che il punto x_5 può essere posto in qualunque posizione in π_1 , ad eccezione dei punti che appartengono alle rette prolungamenti dei segmenti x_1x_2 , x_1x_3 , x_1x_4 , x_2x_3 , x_2x_4 e x_3x_4 , altrimenti troveremmo tre punti allineati, contro le ipotesi del teorema.

Tracciamo in π_1 la retta prolungamento del lato x_1x_4 ; tracciamo inoltre il prolungamento del lato x_2x_4 fino ad incontrare il lato x_1x_3 nel punto x_6 ; tracciamo infine il segmento x_1x_2 che interseca la retta x_3x_4 nel punto x_7 ; in tal modo dividiamo il semipiano π_1 in due regioni illimitate che chiamiamo rispettivamente π_{13} e π_{17} e tre regioni limitate che chiamiamo rispettivamente π_{146} , π_{346} e π_{147} , come in figura.

Se x_5 è contenuto nella regione illimitata π_{13} , applicando la trasformazione T al lato x_1x_3 del triangolo $x_1x_3x_4$ costruiamo, per il lemma precedente, un quadrilatero convesso $x_1x_5x_3x_4$.

Se x_5 è contenuto nella regione illimitata π_{17} , applicando la trasformazione T al lato x_1x_2 del triangolo $x_1x_2x_4$ costruiamo, per il lemma precedente, un quadrilatero convesso $x_1x_5x_2x_4$.

Se x_5 è contenuto nella regione limitata π_{346} , applicando la trasformazione T al lato x_4x_3 del triangolo $x_2x_3x_4$ costruiamo, per il lemma precedente, un quadrilatero convesso $x_3x_5x_4x_2$.

Se x_5 è contenuto nella regione limitata π_{146} , applicando la trasformazione T al lato x_1x_4 del triangolo $x_1x_4x_2$ costruiamo, per il lemma precedente, un quadrilatero convesso $x_1x_5x_4x_2$.

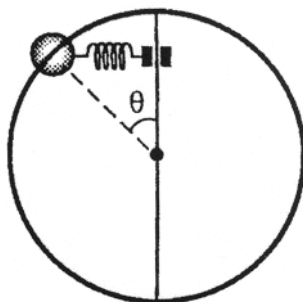
Infine se x_5 è contenuto nella regione limitata π_{147} , applicando la trasformazione T al lato x_1x_4 del triangolo $x_1x_3x_4$ costruiamo, per il lemma precedente, un quadrilatero convesso

$x_1x_5x_4x_3$.

Abbiamo così dimostrato il teorema.

Soluzione del Problema N. 3

Risolviamo la prima parte del problema, in cui la guida circolare è liscia e la sfera è legata alla molla. Ricordiamo che una guida priva d'attrito esercita una reazione vincolare in direzione ortogonale alla guida e quindi in direzione radiale.



Osserviamo che l'angolo θ che individua la posizione della pallina non può essere inferiore all'angolo $\theta_0 = \arcsin(0.1) \simeq 5.74^\circ$ sotteso dalla molla a riposo, perché in tal caso la molla sarebbe compressa ed eserciterebbe una spinta che aggiunta alla forza peso tenderebbe a spostare la pallina verso posizioni con $\theta > \theta_0$.

Osserviamo che le forze in gioco, la forza peso e la forza di richiamo della molla, sono forze conservative e che i punti di equilibrio stabile corrispondono ai punti di minimo dell'energia potenziale. Conviene perciò scrivere l'energia potenziale della sfera e cercarne i punti di minimo, al variare dell'angolo θ tra θ_0 e π .

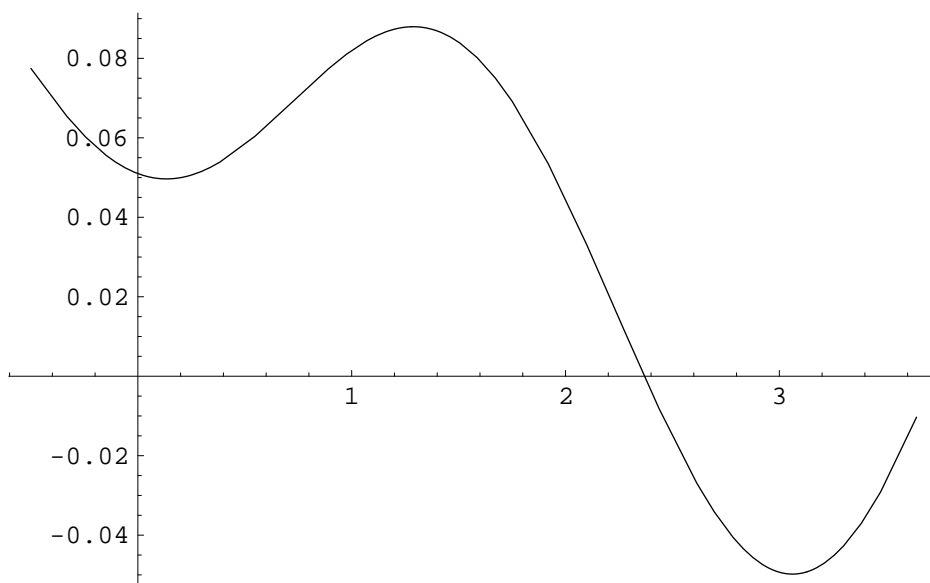
L'energia potenziale gravitazionale della sferetta, scritta in funzione dell'angolo θ , è data da $m g R \cos \theta$, avendo scelto uguale a zero l'energia potenziale gravitazionale della sfera alla quota del centro della guida circolare. L'energia potenziale della molla, scritta in funzione dell'angolo θ , è data da $\frac{1}{2}kR(\sin \theta - \sin \theta_0)^2$, per cui l'energia potenziale complessiva $V(\theta)$ della sfera è;

$$V(\theta) = m g R \cos \theta + \frac{1}{2}kR(\sin \theta - \sin \theta_0)^2$$

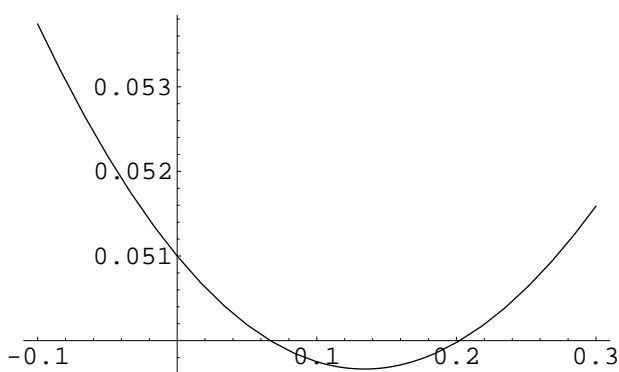
$$V(\theta) = [0.05 \cos \theta + 0.1 (\sin \theta - 0.1)^2] \text{ Joule}$$

(avendo preso il valore approssimato $g = 10 \text{ m/s}^2$) Conviene fare un grafico della funzione $V(\theta)$ al variare di θ tra θ_0 e π . (Ad esempio calcolando il valore della funzione $V(\theta)$ in un certo numero di punti e tracciando la curva interpolante). Si ottiene il seguente graficoriportato in figura.

Si vede che ci sono due minimi, uno in corrispondenza di un angolo θ poco più grande di θ_0 ; l'altro un pò più piccolo di π , cioè vicino al punto d'appoggio della guida. La pallina si posizionerà nel primo o nel secondo minimo a seconda della posizione iniziale: se questa è compresa tra 0 e l'angolo corrispondente al massimo relativo del potenziale $\simeq 1.4$ radianti $\simeq 80.2^\circ$ allora la sfera si collocherà nel primo punto di equilibrio stabile con $\theta \simeq 7.7^\circ$; se invece la posizione iniziale è



compresa tra l'angolo corrispondente al massimo relativo del potenziale $\simeq 80.2^0$ e 180^0 allora la sfera si collocherà nel secondo punto di equilibrio stabile con $\theta \simeq 175.3^0$. Nelle due successive figure sono riportati i grafici nell'intorno del primo e del secondo minimo.

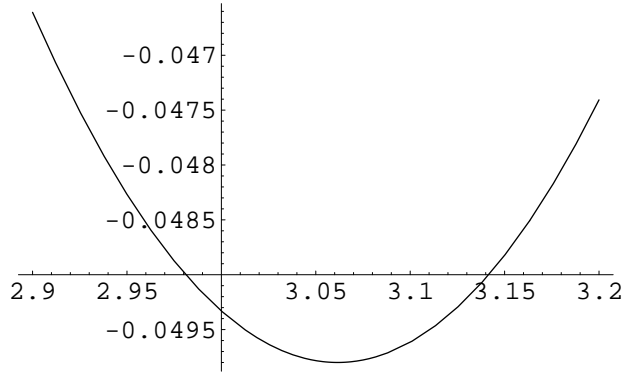


Un modo altrettanto valido, ma più complesso, di risolvere l'esercizio è di analizzare le forze in gioco, di imporre che nei punti di equilibrio la risultante delle forze deve essere nulla e poi di analizzare la stabilità dell'equilibrio, cioè di verificare che se si sposta un poco la sfera dalla sua posizione di equilibrio, le forze in gioco tendono a riportarla nella precedente posizione. Se invece accade che le forze in gioco tendono ad allontanare la sfera dalla sua precedente posizione, allora il punto è di equilibrio instabile. Nel seguito imposteremo la condizione di annullamento della risultante delle forze agenti.

Introduciamo un sistema di riferimento con l'origine O coincidente con il centro della guida circolare, con l'asse x parallelo al piano orizzontale e con l'asse y diretto lungo la verticale e con verso positivo diretto verso l'alto.

Le forze esercitate sulla pallina sono:

- la forza peso $\vec{P} = m\vec{g} = (0, -mg)$; proiettiamo tale forza anche lungo la direzione radiale e lungo la direzione della tangente alla circonferenza. La componente radiale è centripeta



e risulta $(\vec{P})_r = -mg \cos \theta$ mentre la componente lungo la direzione della tangente alla circonferenza risulta $(\vec{P})_\theta = mg \sin \theta$;

- la forza di richiamo esercitata dalla molla $\vec{F} = k(l - l_0)\hat{x} = (k(l - l_0), 0)$, avendo indicato con l la lunghezza della molla in corrispondenza della posizione individuata dall'angolo θ ; risulta $l = R \sin \theta$ ed $l_0 = R \sin \theta_0$; proiettiamo anche questa forza lungo la direzione radiale e lungo la direzione della tangente alla circonferenza. La componente radiale è centripeta e risulta $(\vec{F})_r = -k(l - l_0) \sin \theta = -kR(\sin \theta - \sin \theta_0) \sin \theta$ mentre la componente lungo la direzione della tangente alla circonferenza risulta $(\vec{F})_\theta = -k(l - l_0) \cos \theta = -kR(\sin \theta - \sin \theta_0) \cos \theta$;
- la forza di reazione vincolare \vec{V} esercitata dalla guida circolare, che ha direzione radiale centrifuga. Risulta $(\vec{V})_r = V$ e $(\vec{V})_\theta = 0$

La condizione d'equilibrio si esprime imponendo che il vettore risultante delle tre forze agenti sulla pallina sia uguale a zero

$$m\vec{g} + k(l - l_0)\hat{x} + \vec{V} = 0$$

che dà luogo a due equazioni scalari una volta proiettata sulla direzione radiale e lungo la direzione della tangente alla circonferenza. Otteniamo:

$$-mg \cos \theta - kR(\sin \theta - \sin \theta_0) \sin \theta + V = 0$$

$$mg \sin \theta - kR(\sin \theta - \sin \theta_0) \cos \theta = 0$$

La seconda equazione determina l'angolo θ , che sostituito nella prima determina il valore della reazione vincolare. La seconda equazione contiene le funzioni $\sin \theta$ e $\cos \theta$; la via più semplice consiste nell'esprimerle in funzione della tangente dell'arco $\frac{\theta}{2}$. Si ottiene così un'equazione di quarto grado nell'incognita $t = \tan \frac{\theta}{2}$

Passiamo alla soluzione della seconda parte del problema. In questo caso la guida è scabra con coefficiente d'attrito $\mu = 0.4$ e la molla è stata eliminata. Ricordiamo che la forza d'attrito è diretta tangenzialmente alla circonferenza e che il suo modulo può assumere qualunque valore compreso tra zero ed un massimo pari al prodotto del coefficiente d'attrito statico per il modulo della componente normale della reazione vincolare. Pertanto le posizioni di equilibrio saranno tutte quelle per le quali la componente tangenziale alla guida della forza peso risulta minore del

massimo valore della forza d'attrito esercitabile dalla guida. Poiché la componente radiale della reazione vincolare risulta uguale ed opposta alla componente radiale della forza peso, e quindi

$$\left(\vec{V}\right)_r = mg \cos \theta$$

il modulo della forza d'attrito F_{attr} può assumere il valore massimo dato da;

$$F_{attr} = \mu mg \cos \theta$$

Al variare dell'angolo θ , la componente tangenziale alla guida della forza peso risulta $\left(\vec{P}\right)_\theta = mg \sin \theta$. Tale componente diventa uguale al valore massimo della forza d'attrito esercitabile dalla guida per un valore dell'angolo θ_1 determinato dall'equazione:

$$mg \sin \theta_1 = \mu mg \cos \theta_1$$

$$\tan \theta_1 = \mu \quad \theta_1 = \arctan \mu \simeq 0.38 \text{ radianti} \simeq 21.8^\circ$$

Pertanto tutte le posizioni interne all'arco di ampiezza compresa tra -21.8° e $+21.8^\circ$ sono posizioni di equilibrio. Inoltre, tenendo conto delle proprietà di periodicità della funzione tangente, sono di equilibrio anche tutte le posizioni interne all'arco di ampiezza compresa tra $-21.8^\circ + 180^\circ = 158.2^\circ$ e $+21.8^\circ + 180^\circ = 201.8^\circ$, arco centrato intorno al punto d'appoggio della guida.

Soluzione del Problema N. 4

Daremo due differenti dimostrazioni. La prima è una dimostrazione per induzione. Com'è noto la dimostrazione per induzione richiede:

- di dimostrare che la proposizione sia vera per $n = 1$;
- fatta l'ipotesi che la proposizione sia vera per un valore arbitrario di n , di dimostrare che la proposizione è vera per il valore immediatamente successivo, $n + 1$

E' immediato verificare che la proposizione è vera per $n = 1$. Infatti in tal caso risulta $n^3 - n = 0$ e 0 è divisibile per 6.

Facciamo ora l'ipotesi che la proposizione sia vera per un valore arbitrario n e dimostriamo che la proposizione è vera per il valore $n + 1$, cioè dobbiamo dimostrare che

$$(n + 1)^3 - (n + 1)$$

è divisibile per 6. Infatti risulta:

$$(n + 1)^3 - (n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n + 1)$$

Per ipotesi $n^3 - n$ è divisibile per 6; bisogna allora dimostrare che anche $3n(n + 1)$ è divisibile per 6. La dimostrazione è semplice, poiché $3n(n + 1)$ è il prodotto del fattore 3 per due numeri consecutivi, n ed $n + 1$, uno dei quali è necessariamente pari, e quindi divisibile per 2. c.v.d.

Un secondo modo di dimostrare che la proposizione è vera parte dall'osservazione che

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

cioè è il prodotto di tre numeri consecutivi. Ciò implica che almeno uno dei tre numeri è pari, e quindi è divisibile per 2 e che uno dei tre numeri è divisibile per 3. Infatti consideriamo il numero $n + 1$. Se esso è divisibile per tre, la proposizione è dimostrata; se non è divisibile per tre, allora la divisione per 3 dà resto 1 oppure resto 2. Se il resto è 1, segue che il numero immediatamente precedente, e cioè n è divisibile per tre; se il resto è 2, allora $n - 1$ sarà divisibile per 3. c.v.d.