IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 3 Marzo, 2005

Traccia della soluzione

Problema n. 1

Il terzo principio della dinamica afferma che in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva. Se indichiamo con $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ le velocità delle due particelle dopo l'urto, deve valere l'equazione vettoriale

$$m\vec{v}_a + m\vec{v}_b = m\vec{v}_0 \qquad (1)$$

Poiché le particelle hanno la stessa massa, possiamo dividere per m e scrivere l'equazione (1)

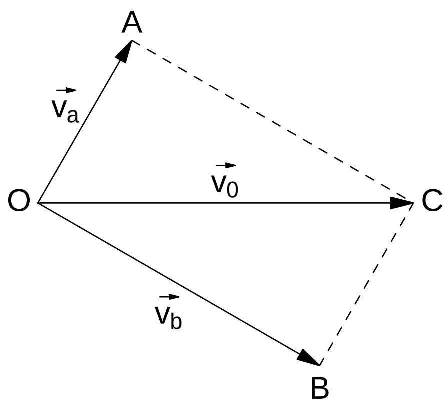
$$\vec{v}_a + \vec{v}_b = \vec{v}_0 \qquad (2)$$

Diamo una rappresentazione grafica dell'equazione vettoriale (2). In figura, riportiamo il parallelogrammo OACB, dove i lati OA e OB sono costituiti dai vettori $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$. Secondo la regola del parallelogrammo, $\vec{v}_0$ è dato dalla diagonale OC.

Poiché l'urto è elastico, vale anche la conservazione dell'energia, che si esprime nel seguente modo

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_0|^2 = \frac{1}{2}m|\vec{v}_a|^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}_b|^2$$

Dividendo per $\frac{1}{2}m$, abbiamo



$$|\vec{v}_0|^2 = |\vec{v}_a|^2 + |\vec{v}_b|^2 \qquad (3)$$

Tornando al nostro parallelogrammo, questa equazione ci dice che

$$OC^2 = OA^2 + AC^2$$

che non è altro che il teorema di Pitagora per il triangolo OAC. Questo prova che l'angolo $\widehat{OAC}$ deve essere retto. Ma poiché in un parallelogrammo gli angoli opposti sono uguali, se $\widehat{OAC}$ è retto anche tutti gli altri angoli devono essere retti. Quindi, in particolare, l'angolo $\widehat{AOB}$ formato tra le velocitá delle particelle $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ è retto.

Una soluzione più rapida al problema si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore $\vec{v}_0$ per se stesso. Per la conservazione della quantità di moto si ha

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_a + \vec{v}_b) \cdot (\vec{v}_a + \vec{v}_b)$$

Svolgendo i prodotti scalari, si ha

$$|\vec{v}_0|^2 = |\vec{v}_a|^2 + |\vec{v}_b|^2 + 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b \qquad (4)$$

In virtù della conservazione dell'energia [eq. (3)], l'equazione (4) si riduce a

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = 0$$

D'altra parte il prodotto scalare tra due vettori è dato da

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = |\vec{v}_a||\vec{v}_b| \cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Poiché nessuno dei due vettori è nullo, l'unico modo per annullare il prodotto scalare è $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Problema n. 2

Come suggerito nella traccia, esprimiamo il singolo termine della sommatoria come combinazione di due frazioni elementari:

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Esplicitando la somma, la seconda frazione di ogni termine si semplifica con la prima del termine successivo. Le uniche frazioni superstiti sono la prima del primo termine e la seconda dell'ultimo. Quindi, la somma è

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Nella somma di infiniti termini, rimane solo la prima frazione, che fornisce il risultato:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}$$

Problema n. 3

- a) Avendo posto uguale a zero il potenziale all'infinito, il potenziale in A generato dalla distribuzione delle cariche rimanenti è

  $$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{e}{3h} - \frac{e}{5h} + \frac{2e}{8h}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{23e}{60h}$$

  Allo stesso modo, i potenziali sentiti dalle cariche q_B, q_C, q_D e generati dalle altre cariche sono, rispettivamente,

  $$V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2e}{3h} - \frac{e}{2h} + \frac{2e}{5h}\right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{23e}{30h}$$

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2e}{5h} + \frac{e}{2h} + \frac{2e}{3h}\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{23e}{30h}$$

$$V(D) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2e}{8h} + \frac{e}{5h} - \frac{e}{3h}\right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{23e}{60h}$$

Il potenziale generato dalla distribuzione delle quattro cariche nei punti E ed F è infine:

$$V(E) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2e}{6h} + \frac{e}{3h} - \frac{e}{h} + \frac{2e}{2h}\right] = 0$$

$$V(F) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2e}{h\sqrt{2+(4+\sqrt{2})^2}} + \frac{e}{h\sqrt{2+(1+\sqrt{2})^2}}\right.$$
$$\left. -\frac{e}{h\sqrt{2+(-1+\sqrt{2})^2}} + \frac{2e}{h\sqrt{2+(4-\sqrt{2})^2}}\right] = 0$$

Da notare che i punti E ed F appartengono alla circonferenza giacente nel piano yz con centro nell'origine e raggio $2\,h$.

- b) La via più semplice per risolvere questa parte dell'esercizio consiste nell'analisi delle proprietà di simmetria della distribuzione di carica assegnata. Le cariche sono disposte lungo l'asse z, simmetricamente rispetto all'origine; poiché le cariche poste simmetricamente hanno carica opposta, ne consegue che nel piano di simmetria dell'asse z, cioè nel piano $z = 0$ risulta $V(x, y, 0) = 0$.

  Ma i punti del piano $z = 0$ e quelli all'infinito non sono i soli in cui il potenziale è zero, come si è potuto verificare nella parte a) dell'esercizio dove si è ottenuto che nel punto F, non appartenente al piano $z = 0$, risulta $V(F) = 0$. Per trovare gli altri punti a potenziale zero, conviene, sfruttando la simmetria del problema, risolvere l'equazione che si ottiene imponendo la condizione che la somma del potenziale generato dalla carica posta in A e da quella posta in B sia uguale a zero.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-2e}{\sqrt{x^2+y^2+(z+4h)^2}} + \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right] = 0$$

Da cui segue

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+(z+4h)^2}}$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4h^2$$

che è l'equazione di una superficie sferica con centro nell'origine e raggio $2h$. Poiché la somma del potenziale generato dalla carica posta in C e da quella posta in D è uguale ed opposta alla somma del potenziale generato dalla carica posta in A e da quella posta in B, essa si annulla sulla stessa superficie sferica di raggio $2h$. Pertanto il luogo dei punti nei quali il potenziale elettrico è nullo è costituito dall'unione dei punti all'infinito, del piano $z = 0$ e della superficie sferica di centro nell'origine e raggio $2h$.

Problema n. 4

- Il diametro della semicirconferenza è $AB = AC + CB$. Poiché OD è un raggio della stessa semicirconferenza, si ha la relazione

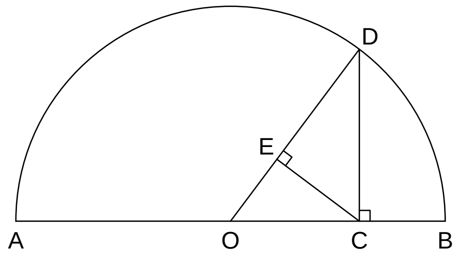
  $$OD = \frac{AC + CB}{2}$$

  che identifica OD con la media aritmetica dei segmenti AC e CB.

- Il triangolo ABD è iscritto in una semicirconferenza e quindi è un triangolo rettangolo. Applicando il secondo teorema di Euclide, che afferma che il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, si ottiene:

  $$CD = \sqrt{AC \cdot CB}$$

  Abbiamo così dimostrato che CD è la media geometrica dei segmenti AC e CB.



Un modo equivalente di ottenere lo stesso risultato parte dall'osservazione che il segmento OC è dato dalla differenza tra AC e il raggio OA. Quindi,

$$OC = AC - \frac{AC + CB}{2} = \frac{AC - CB}{2}$$

Per il teorema di Pitagora,

$$CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{AC + CB}{2}\right)^2 - \left(\frac{AC - CB}{2}\right)^2} = \sqrt{AC \cdot CB}$$

che è la media geometrica dei segmenti AC e CB.

- I triangoli CDE e ODC sono simili, poichè sono entrambi rettangoli e hanno sia il lato CD che l'angolo $\widehat{CDO}$ in comune. Quindi, possiamo scrivere la proporzione

$$\frac{CD}{OD} = \frac{ED}{CD}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{1}{ED} = \frac{OD}{CD^2} = \frac{AC + CB}{2AC \cdot CB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{CB}\right)$$

che identifica ED con la media armonica dei segmenti AC e CB.