

## IIASS

International Institute for Advanced Scientific Studies

“Eduardo R. Caianiello”

Circolo di Matematica e Fisica

Dipartimento di Fisica “E.R. Caianiello” — Università di Salerno

### Premio

**Eduardo R. Caianiello**

per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 3 Marzo, 2005

#### *Problema N. 1*

Una particella di massa  $m$ , che si muove nel riferimento solidale con il laboratorio con velocità costante  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ , quantità di moto  $\vec{p}_0 = m \vec{v}_0$ , energia  $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ , urta una particella identica ma a riposo. Sapendo che l’urto è elastico, e che la direzione del vettore velocità dopo l’urto di una delle particelle forma un angolo  $\neq 0$  con il vettore  $\vec{v}_0$ , mostrare che, secondo le leggi della meccanica classica di Newton, nel riferimento del laboratorio, l’angolo formato dalle direzioni delle velocità delle due particelle dopo l’urto è sempre uguale a  $\frac{\pi}{2}$ .

{E’ interessante osservare che la meccanica relativistica di Einstein fornisce un risultato diverso e che l’esperimento eseguito da Champion nel 1932 al Cavendish Laboratory, (F.C. Champion, Proceedings of the Royal Society, 1932) in cui si analizza l’urto elastico tra un elettrone incidente con velocità variabile tra  $0.82c$  e  $0.93c$ , ( $c$  è la velocità della luce) contro un elettrone a riposo, accorda bene, entro i limiti degli errori sperimentali, con le previsioni della meccanica di Einstein, non con quelli della meccanica di Newton.}

#### *Problema N. 2*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) nacque a Lipsia. A quindici anni entrò all’Università, studiando teologia, filosofia, legge e matematica, e a diciassette conseguì il grado di baccelliere. All’età di 20 anni avrebbe già potuto conseguire il titolo di dottore in legge, ma gli fu rifiutato a causa della sua giovane età. Per questo motivo lasciò Lipsia e conseguì il dottorato

all'Università di Altdorf a Norimberga. Entrò in diplomazia, e nella sua qualità di influente rappresentante di uomini di stato, viaggiò molto.

Nel 1672 si recò a Parigi dove incontrò Huygens, che, tra l'altro, gli sottopose il problema di trovare la somma dei reciproci dei numeri triangolari: ossia di calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

e quella della serie formata da infiniti termini

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$$

Leibniz molto acutamente scrisse ciascun termine come somma algebrica di due frazioni, usando la formula

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

da cui risulta con evidenza, esplicitando i vari termini della sommatoria, che la somma degli  $n$  termini è

$$2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

e che la somma della serie di infiniti termini è 2. Affrontò con successo anche il problema di trovare la somma:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right) \quad (1)$$

e quella della serie formata da infiniti termini

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} \quad (2)$$

Calcolare la somma indicata in (1), e quella formata da infiniti termini indicata in (2).

### Problema N. 3

Lungo l'asse  $z$  di un riferimento cartesiano sono disposte quattro cariche elettriche  $q_A = -2e$ ,  $q_B = e$ ,  $q_C = -e$ ,  $q_D = 2e$  nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  di coordinata  $z_A = -4h$ ,  $z_B = -h$ ,  $z_C = h$ ,  $z_D = 4h$ .

- a) Avendo assegnato il valore zero al potenziale elettrico all'infinito, calcolare il potenziale elettrico nel quale si trova ciascuna delle cariche in  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , ed il potenziale nei punti  $E \equiv (0, 0, 2h)$  ed  $F \equiv (0, \sqrt{2}h, \sqrt{2}h)$  generato dalla distribuzione data.
- b) Determinare la superficie costituita dal luogo dei punti dello spazio in cui il potenziale elettrico generato dalla distribuzione assegnata di cariche è pari a zero.

### Problema N. 4

Durante il regno di Diocleziano, Pappo di Alessandria, intorno all'anno 320, compose l'opera in 8 Libri dal titolo "Collezione", importante sia per la preziosa documentazione storica sugli sviluppi della matematica nel mondo greco, sia per alcuni rilevanti personali contributi.

Nel libro III Pappo espone la teoria delle medie e presenta un'interessante costruzione che include la media aritmetica, quella geometrica e quella armonica in un unico semicerchio. Nella figura, sul diametro  $AB$  si sceglie un punto  $C$ , dal quale si traccia la semicorda  $CD$ , ortogonale al diametro  $AB$ . Si congiunge il centro  $O$  della semicirconferenza con il punto  $D$ , ed infine si traccia il segmento  $EC$  perpendicolare al segmento  $OD$ . Pappo dimostra che  $OD$  rappresenta la media aritmetica,  $CD$  la media geometrica e  $ED$  la media armonica dei segmenti  $AC$  e  $CB$ . Dimostrate il risultato ottenuto da Pappo d'Alessandria.

Ricordatevi che la media aritmetica  $\bar{m}$ , la media geometrica  $m_g$  e la media armonica  $m_a$  di due grandezze  $a$  e  $b$  sono definiti rispettivamente come:

$$\bar{m} = \frac{a+b}{2} \qquad m_g = \sqrt{a \cdot b} \qquad \frac{1}{m_a} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

