IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 6 Marzo, 2006

Traccia della soluzione

Problema n. 1

- Osserviamo preliminarmente che α è un angolo al centro della circonferenza centrata in C che sottende l'arco AB (vedi figura). Lo stesso arco è sotteso dall'angolo alla circonferenza $B\widehat{D}A$. Poiché l'angolo alla circonferenza è uguale alla metà dell'angolo al centro corrispondente, risulta che

$$B\widehat{D}A = \frac{\alpha}{2}.$$

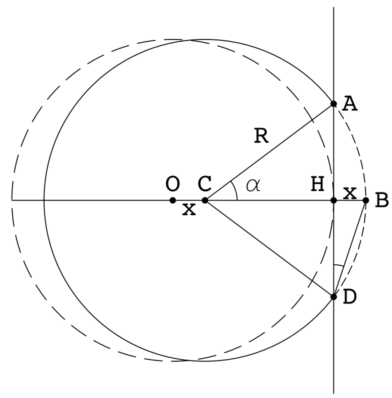
Osserviamo inoltre che l'approssimazione usata nel testo, di confondere il seno di un arco con l'arco stesso, quando esso è molto minore di uno, deriva dal limite notevole

$$lim_{\alpha\to 0}\frac{sin\,\alpha}{\alpha} = 1$$

e che analogamente si dimostra l'altro limite notevole

$$lim_{\alpha\to 0}\frac{tan\,\alpha}{\alpha} = 1$$

per cui è anche vero che $tan\,\alpha \simeq \alpha$ per $\alpha \ll 1$.



Il segmento $\overline{BH}$, che è anch'esso uguale ad x, (essendo x lo spostamento $\overline{OC}$ del centro della palla), è il cateto del triangolo rettangolo BHD, e quindi si può esprimere come

$$\overline{BH} = \overline{DH} \cdot \tan\frac{\alpha}{2} \simeq R\alpha \cdot \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}R\alpha^2,$$

dove abbiamo approssimato la tangente con l'angolo stesso, essendo per ipotesi $\alpha \ll 1$.

Per chi conosce lo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche, lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che

$$\overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = R(1 - \cos\alpha)$$

e utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor del coseno troncato al second'ordine.

La forza esercitata dalla parete è proporzionale all'area di contatto A, e quindi è proporzionale ad α^2; ma anche lo spostamento x è proporzionale ad α^2. Ne consegue che la forza è proporzionale allo spostamento x, ma con il segno cambiato poiché essa è diretta in verso contrario allo spostamento $\vec{x}$. La sua componente perpendicolare alla superficie di contatto è dunque

$$F = -A\Delta p = -\pi\Delta p R^2\alpha^2 = -kx.$$

Risulta quindi

$$k = 2\pi\, R\, \Delta p.$$

- Ci si trova di fronte ad un moto armonico ogni qual volta si è in presenza di una forza di richiamo elastica del tipo $\vec{F} = -k\vec{x}$. Il periodo dell'oscillazione è $T = \frac{2\pi}{\omega}$, dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ rappresenta la pulsazione dell'oscillazione.

  L'intervallo di tempo Δt durante il quale la palla è a contatto con la parete è definito dall'intervallo di tempo in cui risulta $x > 0$. Inizia quindi quando $x = 0$ a $t = 0$, si protrae per tutto il tempo in cui $x > 0$, e termina quando x è di nuovo nullo a $t = \Delta t$. Il fatto che x sia uguale a zero all'istante finale, implica che l'argomento del seno deve essere uguale a π.

  Abbiamo, quindi,

  $$\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta t = \pi,$$

  .

  da cui ricaviamo

  $$\Delta t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

  che è proprio uguale alla metà del periodo d'oscillazione.

  La velocità del centro della palla durante l'impatto è data dalla derivata $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ dello spostamento rispetto al tempo. Otteniamo

  $$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X_0\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

  In particolare, per $t = 0$, otteniamo la velocità iniziale della palla

  $$v_0 = X_0\sqrt{\frac{k}{m}},$$

da cui ricaviamo

$$X_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- La durata dell'impatto vale

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 7.1 \times 10^{-3} s$$

e non dipende dalla velocità iniziale.

Problema n. 2

- Per un triangolo rettangolo ($B\hat{A}C = \pi/2$) i due segmenti $\overline{AB'}$ e $\overline{AC'}$ coincidono, $\overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{BC}$ e il teorema di Thabit si riduce al teorema di Pitagora.

  Consideriamo ora un triangolo qualunque ABC come in figura, con l'angolo $B\hat{A}C$ ottuso. Si osservi che i triangoli ABC e $AB'B$ sono simili, così come i triangoli ABC e $AC'C$. Infatti per la prima coppia si ha che l'angolo $A\hat{B}C$ è in comune, ed inoltre l'angolo $B\hat{A}C$ e l'angolo $A\hat{B'}B$ sono uguali per costruzione; analogamente per la seconda coppia l'angolo $A\hat{C}B$ è in comune e l'angolo $B\hat{A}C$ è uguale all'angolo $A\hat{C'}C$, per costruzione. In due triangoli simili i lati sono proporzionali e quindi sono uguali i rapporti tra i lati, appartenenti a triangoli diversi, opposti ad angoli uguali. Pertanto

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CC'}}\,. \tag{2}$$

  Per quanto riguarda il primo membro della (1), numeratore e denominatore sono opposti rispettivamente agli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{B'}B$, per il secondo membro agli angoli $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}B'$; per la (2), per il primo membro agli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C'}C$, per il secondo membro agli angoli $A\hat{B}C$ e $C\hat{A}C'$.

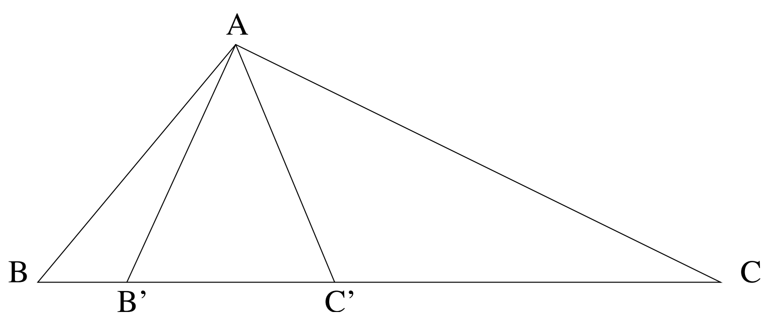
Dalle relazioni (1),e (2) segue rispettivamente

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BB'}\,, \tag{3}$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CC'}\,, \tag{4}$$

da cui si ottiene, sommando, la relazione cercata

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\,\left(\overline{BB'} + \overline{CC'}\right)\,. \tag{5}$$

Se l'angolo $B\hat{A}C$ è acuto, può accadere che entrambi i punti B' e



C' cadono all'esterno del segmento BC, o uno cade all'esterno ed uno all'interno. In entrambi i casi si può ripetere la precedente dimostrazione, sfruttando la similitudine dei triangoli.

Nel caso limite di un triangolo equilatero, il punto B' coincide con C ed il punto C' coincide con B e la relazione (5) diventa un'identità.

Problema n. 3

Dimostriamo prima che la somma dei divisori di $2^n p \cdot q$ è uguale a $2^n r$.

- Tra i divisori di $2^n p \cdot q$ troviamo i numeri 1, p, q, $p \cdot q$. La somma di questi quattro divisori fa $1 + p + q + p \cdot q = (p+1)(q+1)$. Inoltre, per ogni numero intero k minore o uguale ad n, sono pure divisori 2^k, $2^k p$, $2^k q$, $2^k p \cdot q$. La somma di questi quattro divisori fa $2^k(p+1)(q+1)$. Tenendo conto di tutti i divisori al variare di k, otteniamo dunque

$$\sum_{k=0}^{n} \left[2^k(p+1)(q+1)\right] - 2^n p \cdot q,$$

  dove abbiamo sottratto il numero $2^n p \cdot q$ stesso, che, in accordo con la traccia, non va considerato nella somma dei divisori.

  Per la proprietà distributiva della somma, possiamo portare fuori dalla sommatoria tutti i fattori che non dipendono dall'indice k. Abbiamo, quindi,

$$(p+1)(q+1) \sum_{k=0}^{n} 2^k - 2^n p \cdot q.$$

  La somma $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$ è facile da calcolare, essendo la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione 2 :

$$(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) = (2^{n+1} - 1)$$

  Utilizzando quest'uguaglianza e sostituendo i valori di p e q dati dalla traccia, abbiamo

$$9 \cdot 2^{2n-1}(2^{n+1} - 1) - 2^n(3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1).$$

  Sviluppando i prodotti, abbiamo

$$9 \cdot 2^{3n} - 9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{3n-1} + 3 \cdot 2^{2n} + 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n.$$

  Sfruttando il fatto che $2^{3n} = 2^{3n-1} + 2^{3n-1}$ e che $3 \cdot 2^{2n} + 3 \cdot 2^{2n-1} = 9 \cdot 2^{2n-1}$, dopo le opportune semplificazioni, rimane

$$9 \cdot 2^{3n-1} - 2^n,$$

che coincide con $2^n \cdot r$.

- La seconda dimostrazione è simile alla prima. I divisori di $2^n \cdot r$ sono 1, r, 2, $2r$ e così via. La loro somma è

$$\sum_{k=0}^{n} \left[2^k (r+1) \right] - 2^n r.$$

Sfruttando di nuovo la proprietà distributiva della somma e ricordando che $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, abbiamo

$$(2^{n+1} - 1)(r+1) - 2^n \cdot r.$$

Sostituendo l'espressione di r data dalla traccia e svolgendo i prodotti, abbiamo

$$9 \cdot 2^{3n} - 9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{3n-1} + 2^n.$$

Ricordando che $2^{3n} = 2^{3n-1} + 2^{3n-1}$ e che $9 \cdot 2^{2n-1} = 3 \cdot 2^{2n} + 3 \cdot 2^{2n-1}$, abbiamo

$$9 \cdot 2^{3n-1} - 3 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{2n} + 2^n,$$

che coincide con $2^n \cdot p \cdot q$.

Problema n. 4

- Indichiamo con w la componente della velocità del vento tra il punto di osservazione A e il punto di osservazione B. Nel verso opposto, dal punto di osservazione B al punto di osservazione A, il vento soffia quindi con velocità $-w$. La necessità di far sparare *contemporanemante* i due cannoni viene proprio dal fatto che solo in questo caso possiamo essere sicuri che la velocità del vento nei due versi sia uguale e con segno opposto. Possiamo esprimere la distanza percorsa (d) in funzione della velocità del suono (v), della velocità del vento e del tempo di percorrenza come (moto rettilineo uniforme)

$$\begin{aligned} d &= (v+w)\,t_1 \qquad \mathrm{A} \to \mathrm{B}\,, && (6) \\ d &= (v-w)\,t_2 \qquad \mathrm{B} \to \mathrm{A}\,. && (7) \end{aligned}$$

Osserva che stiamo assumendo che la propagazione del lampo di luce sia istantaneo.

Dalla (7), per esempio, possiamo ricavare una espressione per la velocità del vento in funzione delle altre quantità del problema

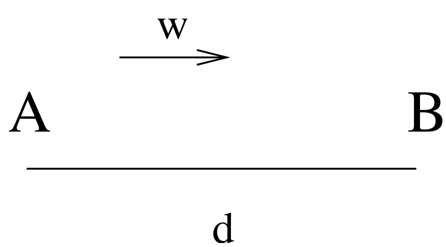
$$w = v - \frac{d}{t_2}\,, \tag{8}$$

infine, sostituendo nella (6), otteniamo l'espressione cercata

$$v = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)\,. \tag{9}$$

Nota che in assenza di vento ($w = 0$), il tempo di percorrenza per entrambi i percorsi risulta uguale ($t_1 = t_2 = t$) e la (9) si riduce alla relazione $v = d/t$.

Inserendo i dati del problema otteniamo un valore per la velocità del suono in aria di $v = 336.9$ m/s, del tutto consistente con il valore misurato oggi di circa 340 m/s.


w
A
B
d