IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

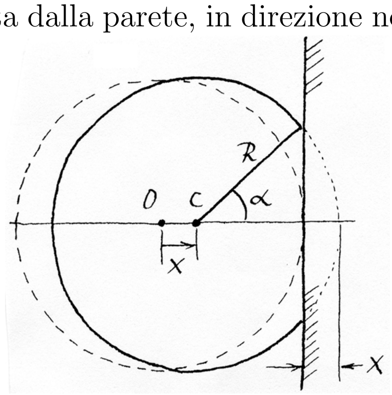
Prova del 6 Marzo, 2006

Problema **N. 1**

Una palla da tennis urta contro una parete rigida, muovendosi con velocità v_0 in direzione normale alla parete. La pressione dell'aria interna alla palla sia $p_0 + \Delta p$, essendo p_0 la pressione atmosferica. Per effetto dell'urto normale la palla subisce una piccola deformazione come in figura ($\alpha \ll 1$). Indichiamo con A l'area di contatto; risulta

$$A = \pi\, R^2\, sin^2\alpha \simeq \pi\, R^2\, \alpha^2$$

La forza esercitata dalla parete, in direzione normale alla stessa, è in modulo



pari a $F = A\,\Delta p$

- Mostrare che, essendo $\alpha \ll 1$, lo spostamento $OC = x$ del centro della palla è dato da
$$x = \frac{1}{2}\, R\, \alpha^2$$
e che la forza esercitata sulla palla è data da $F = -k\,x$; determinare la costante k in funzione di Δp ed R.

- Durante l'impatto, pertanto, il centro C della palla compie un moto armonico
$$x = X_0\, sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \right)$$
Mostrare che la durata del contatto con la parete, che indichiamo con Δt, è uguale a metà del periodo di questa oscillazione; determinare la costante X_0 in funzione della velocità iniziale della palla.

- Sapendo che la massa della palla è $m = 5.67\, 10^{-2}$ kg, che il diametro è di 6.35 cm e che $k = 1.1\, 10^4$ Newton/m, calcolare il tempo di durata dell'impatto Δt. Dipende Δt dalla velocità con cui la palla è scagliata contro la parete?

Problema **N. 2**

Una considerevole parte della scienza e della matematica dell'antica Grecia non è andata perduta solo grazie all'improvviso risveglio culturale dell'Islam nella seconda metà dell'ottavo secolo . Fu il mecenatismo di tre grandi protettori della cultura, i califfi al-Mansur, Harun ar-Rashid ed al-Mamun che trasformò la città di Bagdad in una nuova Alessandria d'Egitto. In particolare al-Mamun fondò a Bagdad una "Casa del Sapere" (Bait al-hikma) paragonabile all'antica biblioteca d'Alessandria. Fra i suoi membri v'era un matematico ed astronomo, Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi, il cui nome sarebbe diventato molto noto nell'Europa occidentale. Egli scrisse opere di astronomia e di matematica, le più antiche delle quali erano probabilmente basate sul *Sindbad* di origine indiana. Tra l'altro scrisse due opere, di Aritmetica e di Algebra, che svolsero un ruolo molto importante nella storia della matematica. Una di queste ci è pervenuta in una sola copia nella traduzione latina recante il titolo *De numero indorum*, essendo andata perduta la versione originale araba. In quest'opera al-Khuwarizmi presentava un'esposizione così completa del sistema di numerazione indiano da produrre l'errata convinzione che il nostro sistema di numerazione fosse d'origine araba. Lo schema di numerazione facente uso di cifre indiane venne chiamato semplicemente algoritmo, termine che, derivato originariamente dal nome di al-Khuwarizmi, significa oggi, più generalmente, qualsiasi particolare procedura di calcolo. Il titolo della sua opera più importante, *Al-jabr wa'l muqabalah* ha fornito alle lingue moderne un termine di uso ancor più popolare.

Da tale titolo deriva infatti la parola *algebra*: fu da quest'opera che l'Europa imparò più tardi quella parte della matematica che ha questo nome.

Il IX secolo fu un secolo glorioso per la matematica araba giacché produsse non solo al-Khuwarizmi ma anche Thabit ibn-Qurra (826 - 901). Thabit fondò una scuola di traduttori, specialmente dal greco e dal siriano, e a lui dobbiamo un debito immenso per traduzioni in arabo di opere di Euclide, Archimede, Apollonio, Tolomeo ed Eutocio. Thabit aveva assimilato così profondamente il contenuto dei classici da lui tradotti da suggerire modificazioni e generalizzazioni. Ad esempio Thabit presentò una generalizzazione del teorema di Pitagora applicabile a tutti i triangoli, sia esso rettangolo, equilatero, isoscele o scaleno. Il teorema è il seguente: se dal vertice A di un triangolo qualsiasi ABC si tracciano due rette che intersecano la retta BC nei punti B' e C' in modo che gli angoli $A\hat{B'}B$ ed $A\hat{C'}C$ siano uguali all'angolo $\hat{A}$, allora

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}\left(\overline{BB'} + \overline{CC'}\right)$$

Dimostrare il teorema di Thabit.

Problema **N. 3**

La scuola pitagorica definiva numeri "amicabili" due numeri interi, m ed n, se m è la somma dei divisori di n ed n è la somma dei divisori di m. I più piccoli numeri che formano una coppia "amicabile" sono 220 e 284. Infatti 220 ha per divisori i numeri 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, la cui somma fa 284, mentre 284 ha per divisori i numeri 1, 2, 4, 71 e 142, la cui somma fa 220.

A Thabit ibn-Qurra dobbiamo una proposizione di notevole interesse per i numeri amicabili: se p, q ed r sono numeri primi, e se hanno la forma $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, ed $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ (con $n > 1$), allora $2^n \cdot p \cdot q$, e $2^n \cdot r$ sono numeri "amicabili". Dimostrare che la proposizione è vera.

Problema **N. 4**

Nel diciottesimo secolo membri dell'Accademia di Francia organizzarono la prima accurata misura della velocità del suono in aria. Per evitare errori sistematici dovuti alla non conoscenza della velocità del vento lungo il percorso assegnato per la misura, decisero di misurare il tempo impiegato dal suono sia lungo il percorso di andata che quello di ritorno. A tal fine dei cannoni furono fatti sparare contemporaneamente a Montmartre ed a Monthléry, distanti tra loro 29 km. Gli osservatori di ciascuna stazione misurarono il tempo di ritardo tra l'istante d'osservazione del lampo di luce prodotta dallo sparo alla bocca del cannone sulla stazione di fronte ed il successivo arrivo del rombo prodotto. Mostrare che dalle misure dei due intervalli di tempo t_1 e t_2 impiegati dal suono nelle due direzioni è possibile calcolare la velocità del suono in aria in quiete come segue:

$$v = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$

indipendentemente dall velocità con cui il vento soffia da una stazione ad un'altra. d rappresenta la distanza tra le due stazioni di misura. Calcolare la velocità v del suono sapendo che i tempi misurati furono $t_1 = 87.4\,s$ e $t_2 = 84.8\,s$.