IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 15 Marzo, 2009

Traccia della soluzione

Problema n. 1

Sia la forza elastica esercitata dalla molla che la forza elettrostatica tra cariche elettriche è conservativa e quindi durante il moto delle sferette l'energia totale si conserva. La via più semplice per rispondere al quesito è proprio quella di utilizzare il teorema di conservazione dell'energia, confrontando l'energia totale nella configurazione iniziale con quella di massima elongazione.

Nella configurazione iniziale, la molla è a riposo e la sua lunghezza è l_0, per cui l'energia potenziale dovuta alla forza elastica della molla è zero; le due sferette sono ferme, per cui la loro energia cinetica è nulla; solo l'energia potenziale elettrostatica $\Delta V_{in,elettr}$ è diversa da zero ed è uguale a

$$\Delta V_{in,elettr} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q^2}{l_0}, \tag{1}$$

con ϵ costante dielettrica del mezzo in cui sono immerse le sferette (ϵ_0 nel caso del vuoto). Possiamo quindi scrivere che l'energia totale iniziale E_{in} è:

$$E_{in} = \Delta V_{in,elettr} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q^2}{l_0}, \tag{2}$$

Al momento della massima elongazione le sferette hanno di nuovo velocità nulla, per cui l'energia cinetica delle sferette è nulla; la molla ha lunghezza $l = l_0 + \Delta l$ e quindi l'energia potenziale elastica $\Delta V_{fin,elast}$ vale

$$\Delta V_{fin,elast} = \frac{1}{2}k\,\Delta l^2 \tag{3}$$

infine l'energia potenziale elettrostatica $\Delta V_{fin,elettr}$ vale:

$$\Delta V_{fin,elettr} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q^2}{l_0 + \Delta l}, \tag{4}$$

Pertanto nella configurazione di massima elongazione l'energia totale del sistema è dato da

$$E_{fin} = \Delta V_{fin,elast} + \Delta V_{fin,elettr} = \frac{1}{2}k\,\Delta l^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q^2}{l_0 + \Delta l}. \tag{5}$$

Uguagliando l'energia totale iniziale E_{in} con quella finale E_{fin}, si ottiene, dopo opportune semplificazioni, la seguente equazione di secondo grado:

$$\Delta l^2 + l_0 \Delta l - \frac{q^2}{2\,\pi\,\epsilon\,k\,l_0} = 0, \tag{6}$$

le cui soluzioni sono

$$\Delta l = -\frac{l_0}{2} \pm \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + \frac{q^2}{2\,\pi\,\epsilon\,k\,l_0}}. \tag{7}$$

Delle due soluzioni, quella col segno negativo non è fisicamente accettabile, perché fornisce un valore negativo alla lunghezza complessiva $l = l_0 + \Delta l$. Quella col segno positivo permette di calcolare la massima elongazione:

$$l = l_0 + \Delta l = \frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + \frac{q^2}{2\,\pi\,\epsilon\,k\,l_0}}. \tag{8}$$

Problema n. 2

La congettura è vera per $n = 1$; infatti si ha

$$1^p - 1 = 0$$

e zero è divisibile per ogni numero primo p.

Ora fatta l'ipotesi che la congettura sia vera per $n = k$, cioè che $k^p - k$ è divisibile per il numero primo p, dobbiamo dimostrare che essa sia vera per

$n = k+1$, cioè che $(k+1)^p - (k+1)$ è ancora divisibile per il numero primo p. Infatti utilizzando lo sviluppo della potenza di un binomio, otteniamo:

$$(k+1)^p - (k+1) = k^p + \binom{\text{p}}{1} k^{p-1} + \binom{\text{p}}{2} k^{p-2} + \cdots + \binom{\text{p}}{\text{p-1}} k + 1 - (k+1)$$

$$= (k^p - k) + \binom{\text{p}}{1} k^{p-1} + \binom{\text{p}}{2} k^{p-2} + \cdots + \binom{\text{p}}{\text{p-1}} k$$

Per ipotesi il primo binomio in parentesi , $k^p - k$, è divisibile per il numero primo p; dobbiamo quindi dimostrare che la somma dei termini rimanenti, ciascuno dei quali contiene a fattore un coefficiente binomiale, è divisibile per il numero primo p. A tal fine ricordiamo che ogni coefficiente binomiale è un numero intero e che esso può essere scritto come rapporto tra fattoriali:

$$\binom{\text{p}}{\text{q}} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)(q-2)\cdots 2 \cdot 1}$$

Qui interviene in modo determinante la proprietà che p è un numero primo. Infatti una volta che abbiamo espresso il generico coefficiente binomiale come rapporto tra numeri interi, e sapendo che tale rapporto è sicuramente un numero intero, possiamo affermare che ciascun coefficiente binomiale può essere scritto come il prodotto del numero primo p per un secondo fattore anch'esso intero. Inoltre il generico coefficiente binomiale $\binom{\text{p}}{\text{q}}$ è moltiplicato per la potenza k^{p-q}, che è a sua volta un numero intero. Pertanto possiamo scrivere:

$$\binom{\text{p}}{1} k^{p-1} + \binom{\text{p}}{2} k^{p-2} + \cdots + \binom{\text{p}}{\text{p-1}} k = p \cdot \alpha$$

con α opportuno numero intero. In definitiva

$$(k+1)^p - (k+1) = (k^p - k) + p \cdot \alpha$$

è divisibile per il numero primo p, poiché è la somma di due termini, ciascuno dei quali è divisibile per p

Problema n. 3

Il lato di un rombo con diagonali d_1 e d_2 si ottiene applicando il teorema di Pitagora. Abbiamo

$$l = \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{2} = 5 \text{ cm}. \tag{9}$$

L'energia potenziale totale è data dalla somma di tutte le energie potenziali delle cariche considerate a coppie. Le coppie possibili con quattro cariche sono 6, quattro delle quali hanno per distanza un lato del rombo, una si trova agli estremi della diagonale maggiore e l'ultima agli estremi della diagonale minore. Pertanto, la somma delle 6 energie potenziali è

$$E_4 = 4\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d_2} = 98 \text{ J}, \tag{10}$$

Poiché il campo elettrostatico è conservativo, il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico per trasportare la carica q_5 dall'infinito al centro del rombo è dato dalla differenza tra l'energia potenziale totale delle cinque cariche nella configurazione con q_5 al centro del rombo e quella iniziale con le quattro cariche ai vertici del rombo e q_5 all'infinito.

Con q_5 all'infinito, l'energia potenziale totale è pari a quella appena calcolata ($E_4 = 98\ J$); quando la quinta carica è al centro del rombo, l'energia potenziale totale E_5 si ottiene aggiungendo ad E_4 il contributo delle quattro nuove coppie formate dalla carica q_5 e le quattro già esistenti. In due coppie la distanza è la metà della diagonale maggiore e nelle altre due è la metà della diagonale minore. L' energia potenziale totale E_5 è quindi

$$E_5 = E_4 + 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,q_5}{\frac{d_1}{2}} + 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,q_5}{\frac{d_2}{2}} = -112\ J. \tag{11}$$

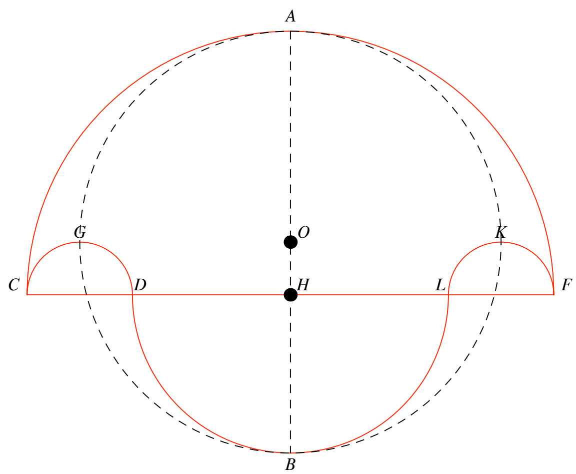
Il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico, uguale ad $E_5 - E_4$, è pertanto uguale a

$$L = E_5 - E_4 = -210\ J \tag{12}$$

Problema n. 4

Sia r la lunghezza del segmento AO, raggio del cerchio con centro O (disegnato con con una linea tratteggiata nella figura sottostante). Indichiamo con $A = \pi\, r^2$ larea di questo cerchio. Vogliamo dimostrare che larea delimitata dal *salinon* (delimitato nella figura sottostante dalla linea continua in rosso), è uguale ad A. Indichiamo con h la lunghezza del segmento OH con $0 < h < r$.

Indichiamo la semicirconferenza CAF di raggio $r + h$ con c_1;
indichiamo la semicirconferenza DBL di raggio $r - h$ con c_2;
indichiamo la semicirconferenza CGD di raggio h con c_3;
indichiamo la semicirconferenza LKF di raggio h con c_4.



L'area del semicerchio delimitato da c_1 e dal diametro CF è

$$A_1 = \frac{\pi}{2}(r + h)^2$$

L'area del semicerchio delimitato da c_2 e dal diametro DL è

$$A_2 = \frac{\pi}{2}(r - h)^2$$

L'area del semicerchio delimitato da c_3 e dal diametro CD è

$$A_3 = \frac{\pi}{2}h^2$$

L'area del *salinon* $A_{salinon}$ risulta essere uguale a $A_1 + A_2 - 2A_3$, per cui

$$A_{salinon} = A_1 + A_2 - 2A_3 = \frac{\pi}{2}\Big((r+h)^2 + (r-h)^2 - 2k^2\Big) = \pi r^2 = A$$

Si è così dimostrato che l'area del *salinon* è uguale all'area del cerchio di raggio r, *indipendentemente* dal valore di h