IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 17 Marzo, 2009

Problema **N. 1**

Due sferette metalliche, di massa m e raggio r, sono legate alle due estremità di una molla isolante di massa trasurabile, di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0, e poggiate su un piano orizzontale privo d'attrito. ($r \ll l_0$).
Su ciascuna delle due sferette viene trasferita una carica elettrica q, e le due sferette cominciano ad oscillare. (Si assuma che la distribuzione della carica sulle due sferette sia uniforme, essendo $r \ll l_0$).

a) Calcolare la massima elongazione l della molla.

Problema **N. 2**

Uno dei più grandi matematici del '700 fu Leonhard Eulero, nato a Basilea nel 1707. Il padre era un pastore protestante e sperava che il figlio entrasse nella carriera ecclesiastica. Ebbe un'educazione di vasto respiro, studiando matematica, teologia, medicina, astronomia, fisica e le lingue orientali. Questa vasta cultura gli fu molto utile quando nel 1727 venne a sapere che nell'Accademia di Pietroburgo era stata aperta una sezione di medicina. Su raccomandazione di Nicolaus e Daniel Bernoulli, professori di matematica e due dei più illustri luminari dell'Accademia, Eulero, che aveva studiato sotto la guida del padre di Nicolaus e Daniel, Jean Bernoulli, fu chiamato come membro della sezione di medicina e di fisiologia. Nel 1733 l'amico Daniel Bernoulli lasciò la Russia per assumere la cattedra di matematica a Basilea, ed Eulero, all'età di 26 anni, passò alla sezione di matematica dell'Accademia. Sposatosi, si dedicò alla pura ricerca matematica, ed alle cure della famiglia di 13 figli.

Nel 1741 fu invitato da Federico il Grande come membro dell'Accademia di Berlino, e l'invito fu accettato. Trascorse 25 anni alla corte di Federico, continuando a ricevere un assegno dalla Russia. Nel 1766 tornò in Russia. Nel corso della sua vita Eulero pubblicò più di 500 lavori, tra libri ed articoli, e per quasi mezzo secolo dopo la sua morte, avvenuta nel 1783, fra le pubblicazioni dell'Accademia di Pietroburgo continuarono ad apparire suoi lavori. La sua produzione matematica, valutata lungo l'intero arco della sua vita, raggiungeva una media di 800 pagine all'anno. Scriveva generalmente in latino e talvolta in francese, anche se la sua lingua madre era il tedesco. Passò gli ultimi diciassette anni della sua vita nella cecità quasi completa, ma neppure questa disgrazia riuscì ad interrrompere la sua produzione scientifica, che continuò con la stessa intensità fino alla morte.
Eulero non pubblicò nessun trattato sulla teoria dei numeri, ma scrisse lettere e saggi su vari aspetti della disciplina. In particolare si soffermò su due congetture di Fermat:

- i numeri della forma $2^{2^n}+1$ sono tutti numeri primi (congettura vera per $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$)
- se p è un numero primo ed n un numero intero naturale, allora $n^p - n$ è divisibile per p

La prima congettura fu dimostrata falsa da Eulero nel 1732, mostrando che $2^{2^5}+1 = 4.294.967.297$ è decomponibile nei fattori $641 \times 6.700.417$. Oggi si tende a sostenere la congettura opposta, e cioè che per $n > 4$ non vi siano più numeri primi della forma $2^{2^n}+1$. Per quanto riguarda la seconda congettura, nota come teorema minore di Fermat, Eulero ne pubblicò la dimostrazione sui *Commentarii* dell'Accademia di Pietroburgo nel 1736. Per la dimostrazione egli utilizzò la procedura dell'induzione completa, che consiste:

- nel verificare che la congettura è vera per $n = 1$
- nel supporre per ipotesi che la congettura sia vera per $n = k$, e dimostrare che essa è vera per $n = k + 1$

Provate a dimostrare il teorema minore di Fermat con la procedura dell'induzione completa.
[Ricordate che l'espressione esplicita di una potenza di un binomio è data da:

$$(k+1)^p = k^p + \binom{\text{p}}{1} k^{p-1} + \binom{\text{p}}{2} k^{p-2} + \cdots + \binom{\text{p}}{\text{p-1}} k + 1\Big]$$

Problema **N. 3**

Quattro cariche elettriche puntiformi uguali, di carica $q = 10^{-5}\ C$, sono disposte nel vuoto ai vertici di un rombo, le cui diagonali misurano rispettivamente $d_1 = 6\ cm$ e $d_2 = 8\ cm$.
Calcolare l'energia potenziale delle quattro cariche disposte ai vertici del rombo.
Una quinta carica $q_5 = -2.0\ 10^{-5}\ C$ è trasportata dall'infinito al centro del rombo.
Calcolare il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico nel portare la carica q_5 nel centro del rombo.

Problema **N. 4**

Archimede, nato a Siracusa nel 287 a. C. e morto per mano di un soldato romano nel 212 a. C., può essere, a buon diritto, considerato il più grande matematico dell'antichità ed il padre della fisica matematica. Scarsamente noti sono i particolari della sua vita. Figlio di un astronomo, è probabile che abbia studiato ad Alessandria d'Egitto, sotto la guida dei discepoli di Euclide.
Sembra che il suo trattato *Sulla sfera e sul cilindro* sia stato da lui considerato l'opera più meritevole di nota, tanto che volle che sulla sua tomba fosse incisa la figura che rappresenta una sfera inscritta in un cilindro circolare retto la cui altezza è uguale al diametro della sfera; egli aveva infatti scoperto e dimostrato che il rapporto tra i volumi del cilindro e della sfera era uguale al rapporto tra le rispettive aree, ossia era un rapporto di tre a due. La figura della sfera inscritta in un cilindro fu effettivamente incisa sulla sua tomba come sappiamo dalla testimonianza di Cicerone. Quando era questore in Sicilia, l'oratore romano rintracciò la tomba sulla quale era ancora visibile l'incisione e la face restaurare. Purtroppo, della tomba di Archimede oggi non vi è più traccia.
Il grande siracusano non disdegnava di trattare problemi elementari. Ad esempio, nel *Libro dei lemmi* troviamo (Proposizione 14) un teorema su quello che Archimede chiamava *salinon* o saliera (vedi figura): l'area totale delimitata dal *salinon* (delimitata interamente da archi semicircolari) è uguale all'area del cerchio (disegnata in figura con una linea tratteggiata) che ha come diametro il segmento che divide simmetricamente in due il *salinon*

(segmento AB in figura). Dimostrate il teorema del *salinon* .