IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"

Circolo di Matematica e Fisica
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

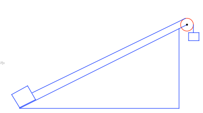
Prova del 18 Maggio, 2010

Problema **N. 1**

È dato un piano inclinato liscio, lungo $L = 2m$, che forma un angolo $\alpha = \pi/6$ con il piano orizzontale.

Un blocchetto di massa $m_1 = 1kg$, posto all'estremità inferiore del piano inclinato, è legato ad un corpo sospeso di massa $m_2 = 0,8kg$, mediante un filo (inestensibile e di massa trascurabile), passante su di una carrucola liscia e di massa trascurabile, fissata all'estremità superiore dello stesso, come in figura.

Calcolare il tempo impiegato dal blocchetto per percorrere un tratto del piano inclinato pari ad $L_1 = 1m$, sapendo che il blocchetto parte da fermo.



Problema **N. 2**

In matematica è talvolta molto facile saltare a conclusioni sbagliate. Un buon esempio è il cosiddetto problema di Malfatti: assegnato un triangolo, costruire tre cerchi non intersecantesi soddisfacenti alla condizione che l'area totale dei cerchi sia la massima possibile.

Questo è un tipico problema d'impacchettamento, e quando fu posto nel 1803, Malfatti propose come soluzione tre cerchi disposti come nella sottostante figura 1, in cui ciascun cerchio è tangente a due lati del triangoli ed

Out[536]=

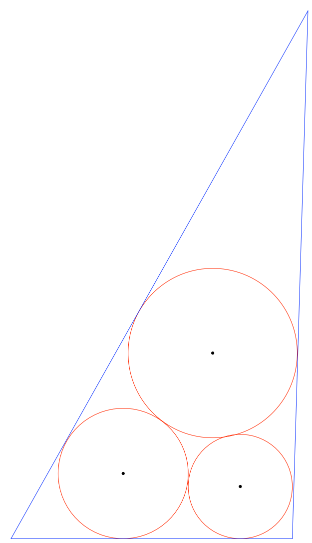


Fig. 1

agli altri due cerchi.

Per oltre un centinaio d'anni la soluzione di Malfatti fu considerata corretta, finché nel 1930 qualcuno notò che la soluzione di Malfatti non era corretta nel caso del triangolo equilatero. Nella configurazione di Malfatti, riportata nella figura 2 sottostante, i cerchi occupano una frazione dell'area del triangolo pari a

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \simeq 0.729$$

Out[830]=

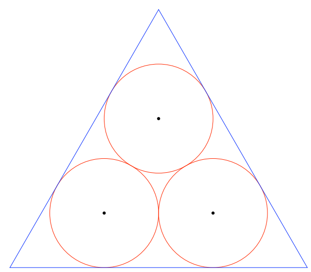


Fig. 2

mentre si poteva fare di meglio, con la configurazione riportata nella figura 3 sottostante, in cui uno dei cerchi è tangente a tutti e tre i lati.

Out[796]=

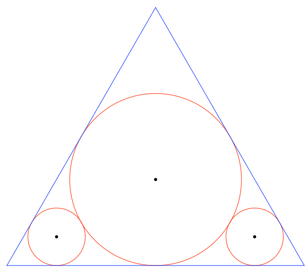


Fig. 3

Calcolare il rapporto tra l'area totale dei tre cerchi in figura 3 e l'area del triangolo equilatero e mostrare che risulta maggiore di 0.729

(La storia si conclude nel 1967, quando M. Goldberg dimostrò che la soluzione data da Malfatti non era corretta in nessun caso, qualunque fosse la forma del triangolo, e che la soluzione corretta corrisponde ad una delle due configurazioni riportate in figura 4 e 5, in cui uno dei cerchi è sempre tangente

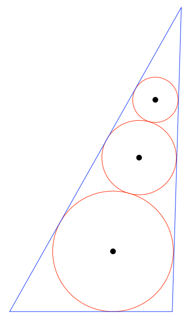


Fig. 4

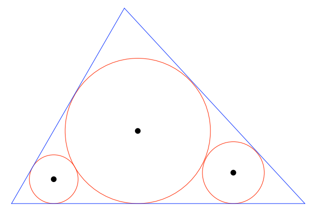


Fig. 5

a ciascuno dei tre lati)

Problema **N. 3**

Per generare in una stazione spaziale una forza di gravità artificiale, la si progetta a forma di cilindro retto di raggio r, in modo che durante il viaggio spaziale la si possa mettere in rotazione con velocità angolare ω, rispetto ad un osservatore inerziale "O" solidale con l'asse del cilindro.

a) Calcolare la velocità angolare di rotazione ω che dà luogo, per gli oggetti posti al suolo della stazione spaziale (cioè lungo la superficie laterale del cilindro), ad una forza di gravità pari a quella che gli stessi oggetti subirebbero sulla terra.

b) descrivere qualitativamente il moto rispetto all'osservatore inerziale "O" di una pallina che viene lasciata "cadere" da un'altezza h dal suolo della stazione.

c) Calcolare il tempo necessario perchè la pallina arrivi al suolo ed il punto di caduta rispetto al piede della verticale.

($r = 250$ m; $h = 20$ m; si ponga l'accelerazione di gravità $g = 10$ ms^{-2})

Problema **N. 4**

Euclide ha dimostrato, nella proposizione 20 dei suoi "Elementi", che esistono infiniti numeri primi. Euclide parte dal presupposto che ogni numero può essere costruito moltiplicando fra loro dei numeri primi, e su questo edifica la successiva dimostrazione.

In sintesi la dimostrazione procede al seguente modo: Euclide prende i primi k numeri primi e ne esegue il prodotto, ottenendo il numero N_k. Poi - e qui sta il colpo di genio - aggiunge 1 al prodotto. In tal modo Euclide costruisce un numero $N_k + 1$che non è divisibile esattamente per nessuno dei k numeri primi dell'elenco. Aggiungendo 1 al prodotto, si garantisce che la divisione per un numero primo dell'elenco dia sempre resto 1.

Ad esempio se prendiamo i primi 6 numeri primi 2, 3, 5, 7, 11, 13 e li moltiplichiamo, otteniamo 30.030; aggiungendo 1 otteniamo 30.031, che non è divisibile esattamente per nessuno dei numeri primi da noi scelti, poiché la divisione per ciascuno di essi dà sempre come resto 1.

Poiché Euclide ha presupposto che tutti i numeri si possono costruire moltiplicando tra loro numeri primi, questa proprietà deve valere anche per il numero $N_k + 1$. Ne consegue necessariamente che debbono esistere altri numeri primi, oltre a quelli dell'elenco scelto, poiché o $N_k + 1$ è esso stesso un numero primo, oppure è ottenibile come prodotto di altri numeri primi non appartenenti all'elenco scelto. Euclide non sostiene che il numero ottenuto con la sua procedura risulti primo, ma solo che deve essere formato dal prodotto di numeri primi non appartenenti all'elenco scelto.

Nel caso particolare di 30.031, esso non è primo ma è dato dal prodotto dei numeri primi 59 e 509. Ma in generale Euclide non è in grado di trovare l'esatto valore di questi nuovi numeri primi. Dimostra solo che debbono esistere.

La cosa interessante è che, pur essendo i numeri primi un sottinsieme infinito dei numeri naturali, è sempre possibile estrarre una successione consecutiva di Q numeri interi, comunque grande sia Q, tale che in essa non sia contenuto alcun numero primo.

La proposizione è la seguente: la sequenza di Q numeri interi consecutivi $\{(Q+1)!+2, (Q+1)!+3, (Q+1)!+4, ..., (Q+1)!+Q, (Q+1)!+(Q+1)\}$ non contiene alcun numero primo.

Dimostrare la proposizione.

(Osservazione: il simbolo $(Q+1)!$, che si legge fattoriale di $Q+1$, indica il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ...... \cdot Q \cdot (Q+1)$)