IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
"Eduardo R. Caianiello"
Dipartimento di Fisica "*E.R. Caianiello*" — Università di Salerno

Premio
Eduardo R. Caianiello
per gli studenti delle Scuole Secondarie Superiori

Prova del 17 Febbraio 2012

Problema **N. 1**

Nel 1994 Andrew Wiles, un matematico inglese professore a Princeton, ha dimostrato il cosiddetto Ultimo Teorema di Fermat. L'enunciato di questo teorema, scritto come nota a margine sul Libro II dell'Arithmetica di Diofanto che Pierre de Fermat stava studiando, afferma che non è possibile determinare una terna di numeri interi a, b, e c (terna fermatiana) tale che sia soddisfatta la relazione

$$a^n + b^n = c^n$$

per ogni n maggiore o uguale a tre. Tra gli appunti di Fermat fu trovato solo qualche cenno per la dimostrazione del teorema nel caso $n = 4$.

Partendo dall'ipotesi che il teorema sia vero per $n = 4$, dimostrare che il teorema è vero per tutti gli n che sono multipli di 4, cioè della forma $n = 4k$ con k intero maggiore di 1.

Problema **N. 2**

Un pallone aerostatico ad aria calda, di volume costante V_0, è aperto alla base; la massa dell'involucro, che occupa un volume trascurabile rispetto a V_0, è m_0. Al suolo l'aria esterna è alla pressione p_0, alla temperatura T_0 e la sua densità è ρ_0

a) nell'ipotesi semplificatrice in cui l'aria all'interno del pallone possa essere considerata alla stregua di un gas perfetto, calcolare la temperatura T_1 dell'aria interna, necessaria affinché il pallone possa galleggiare nell'aria.

b) Il pallone è trattenuto al suolo con una corda mentre l'aria al suo interno viene riscaldata fino a raggiungere una temperatura uniforme $T_2 > T_1$. Calcolare la tensione della corda d'ancoraggio.

($V = 1,1\ m^3$; $m_0 = 0,200\ kg$; $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$Pa; $T_0 = 20^0 C$; $\rho_0 = 1,2\ kg\ m^{-3}$; $T_2 = 200^0 C$)

Traccia della soluzione

Esercizio n. 1

È una tipica dimostrazione per assurdo. È sufficiente infatti osservare che se esistessero tre numeri interi a, b e c tali che

$$a^{4k} + b^{4k} = c^{4k},$$

sarebbe anche valida, per ogni k, la relazione

$$(a^k)^4 + (b^k)^4 = (c^k)^4$$

con $a^k = d$, $b^k = e$, $c^k = f$ ancora numeri interi. Avremmo così violato l'ipotesi che afferma che non esiste alcuna terna di numeri interi per la quale sia valida la relazione

$$d^4 + e^4 = f^4$$

Pertanto se l'ultimo teorema di Fermat è vero per $n = 4$, esso è vero per $n = 4k$.

Esercizio n. 2

Si osservi che la pressione del gas all'interno del pallone aerostatico è uguale alla pressione p_0 dell'aria esterna, essendo il pallone aperto alla base; indichiamo con m_1 la massa d'aria a temperatura T_1 contenuta nel pallone e con m_2 la massa di un ugual volume d'aria alla temperatura esterna T_0; in corrispondenza indichiamo con $\rho_1 = \frac{m_1}{V_0}$ la densità dell'aria calda all'interno del pallone e con $\rho_2 = \frac{m_2}{V_0}$ la densità dell'aria esterna alla temperatura T_0, e con n_1 ed n_2 il rispettivo numero di moli. Osserviamo che risulta

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

La condizione perché il pallone galleggi si ottiene imponendo che la spinta di Archimede sul pallone sia pari alla forza peso del pallone:

$$(m_0 + m_1)g = m_2 g \rightarrow \rho_1 = \rho_2 - \frac{m_0}{V_0} = 1,018\, kg\, m^{-3}$$

L'equazione di stato dei gas perfetti scritta per il gas contenuto nel pallone e per un ugual volume di gas all'esterno del pallone ci fornisce le due equazioni:

$$p_0 V_0 = n_1 R T_1 \quad p_0 V_0 = n_2 R T_0$$

da cui segue

$$n_1 T_1 = n_2 T_0 \rightarrow T_1 = T_0 \frac{n_2}{n_1} = T_0 \frac{\rho_2}{\rho_1} = 345,4\,^0K = 72,4\,^0C$$

b) La densità ρ_2 dell'aria nel pallone alla temperatura T_2 si ricava come prima dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{T_0}{T_2} = 0,74\,kg\,m^{-3}$$

Indicando con T la tensione della corda d'ancoraggio, con A la spinta d'Archimede e con P il peso del pallone, si ha:

$$T = A - P$$

Ponendo $A = \rho_0 g\, V_0$ e $P = m_0 g + \rho_2 g\, V_0$ si ottiene

$$T = [V_0(\rho_0 - \rho_2) - m_0]g = 3,03N$$

Esercizio n. 3

Premio Eduardo R. Caianiello
17 Febbraio 2012
Soluzione Problema n.2

[**Dim.** ($\Rightarrow$)] Sia M il il baricentro del triangolo ABC. Essendo il baricentro di un triangolo, per definizione, il punto di incontro delle sue mediane, si ha che

$$\overline{AB'} = \overline{B'C}, \qquad \overline{BA'} = \overline{A'C}, \qquad \overline{AC'} = \overline{C'B}\ . \tag{1}$$

Dalla (1) segue che

$$S_4 = S_3, \qquad S_1 = S_2, \qquad S_5 = S_6\ . \tag{2}$$

Si conclude, quindi, che

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 1 + 1 + 1 = 3\ , \tag{3}$$

come volevasi dimostrare.

[**Dim.** ($\Leftarrow$)] Supponiamo che

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3\ . \tag{$\mathcal{H}$}$$

Dette a, b, c le altezze dei triangoli BCM, CAM, ABM relative ai lati BC, CA e AB, rispettivamente, si ha che

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{A'B}\cdot\frac{a}{2}}{\overline{A'C}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, \qquad \frac{S_3}{S_4} = \frac{\overline{B'C}\cdot\frac{b}{2}}{\overline{AB'}\cdot\frac{b}{2}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{AB'}}, \qquad \frac{S_5}{S_6} = \frac{\overline{AC'}\cdot\frac{c}{2}}{\overline{BC'}\cdot\frac{c}{2}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}\ . \tag{4}$$

Allora, dalla ($\mathcal{H}$) e applicando il Teorema di Ceva, segue che

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_4} + \dfrac{S_5}{S_6} = 3 \\[2ex] \dfrac{S_1}{S_2} \cdot \dfrac{S_3}{S_4} \cdot \dfrac{S_5}{S_6} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Il sistema (5) è equivalente al seguente sistema

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_4} + \dfrac{S_5}{S_6}\right) = \left(\dfrac{S_1}{S_2} \cdot \dfrac{S_3}{S_4} \cdot \dfrac{S_5}{S_6}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \\ \dfrac{S_1}{S_2} \cdot \dfrac{S_3}{S_4} \cdot \dfrac{S_5}{S_6} = 1 \end{cases}$$

Ricordando che

> ‘la media geometrica di tre numeri reali non negativi è minore od uguale alla loro media aritmetica e che vale l’uguaglianza se, e soltanto se, i tre numeri sono uguali’,

si ha che il sistema (6) ammette la sola soluzione

$$(7) \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{S_5}{S_6} = 1.$$

Dalla (4) segue allora che

$$(8) \qquad \overline{AB'} = \overline{B'C}, \qquad \overline{BA'} = \overline{A'C}, \qquad \overline{AC'} = \overline{C'B}\ ,$$

ossia, M è il baricentro del triangolo ABC. Il che conclude la dimostrazione.