IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
Eduardo R. Caianiello
Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno
Premio Eduardo R. Caianiello
PROVA DEL 17 FEBBRAIO 2012

MATEMATICA

Problema n. 1

Nel 1994 Andrew Wiles, un matematico inglese professore a Princeton, ha dimostrato il cosiddetto Ultimo Teorema di Fermat. L'enunciato di questo teorema, scritto come nota a margine sul Libro II dell'Arithmetica di Diofanto che Pierre de Fermat stava studiando, afferma che non è possibile determinare una terna di numeri interi a, b, e c (terna fermatiana) tale che sia soddisfatta la relazione

$$a^n + b^n = c^n$$

per ogni n maggiore o uguale a tre. Tra gli appunti di Fermat fu trovato solo qualche cenno per la dimostrazione del teorema nel caso $n = 4$. Partendo dall'ipotesi che il teorema sia vero per $n = 4$, dimostrare che il teorema è vero per tutti gli n che sono multipli di 4, cioè della forma $n = 4k$ con k intero maggiore di 1.

Problema n. 2

Giovanni Ceva, nato a Milano il 7 dicembre 1647 (morto a Mantova il 15 giugno 1734), è un matematico italiano principalmente noto per i suoi risultati in Geometria e per una sua pioneristica applicazione della matematica agli studi economici.
Ceva rivelò una precoce propensione verso le scienze esatte. All'Università di Pisa studiò matematica ed in questo periodo venne in contatto con ambienti di ispirazione galileiana, che lo indussero a dedicarsi nel contempo anche allo studio della Fisica.

Nel primo e più noto scritto matematico del Ceva, il *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, in prefazione l'autore scrive di aver trovato nella matematica un rifugio per vicende negative occorsegli, senza ulteriormente precisarle, aggiungendo che aveva insistito nel suo studio nonostante l'opposizione dei familiari.

La prima parte della monografia presenta risultati ottenuti mediante l'applicazione a situazioni geometriche di considerazioni tratte dalla Statica, in particolare baricentriche. Tra tali risultati il più famoso è il seguente

Teorema [Ceva, 1678] "*Dato un triangolo, tre segmenti che congiungono ciascun vertice ad un punto del lato opposto sono concorrenti (ossia si intersecano tutti nello stesso punto) se, e soltanto se, essi determinano sui lati del triangolo sei segmenti tali che il prodotto delle lunghezze di tre non aventi estremi comuni è uguale al prodotto degli altri tre*".

Facendo uso del precedente teorema, dimostrare quanto segue:

> "Sia T un triangolo di vertici A, B e C, e sia M un punto interno al triangolo. Detti A', B', C' i punti di intersezione dei lati BC, AC e AB con le semirette condotte rispettivamente dai vertici A, B, C e passanti per M, e denotate con $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ le aree dei triangoli $MA'B$, $MA'C$, $MB'C$, $MB'A$, $MC'A$, $MC'B$, allora
>
> $$M \textit{ è il baricentro del triangolo } ABC \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3 \text{ ''.}$$

Problema n. 3

Mostrare che, per ogni intero positivo n, il numero

$$5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

è divisibile per 8.

FISICA

Problema n. 1

Un pallone aerostatico ad aria calda, di volume costante V_0, è aperto alla base; la massa dell'involucro, che occupa un volume trascurabile rispetto a V_0, è m_0. Al suolo l'aria esterna è alla pressione p_0, alla temperatura T_0 e la sua densità è ρ_0.

1. nell'ipotesi semplificatrice in cui l'aria all'interno del pallone possa essere considerata alla stregua di un gas perfetto, calcolare la temperatura T_1 dell'aria interna, necessaria affinchè il pallone possa galleggiare nell'aria.

2. Il pallone è trattenuto al suolo con una corda mentre l'aria al suo interno viene riscaldata fino a raggiungere una temperatura uniforme $T_2 > T_1$. Calcolare la tensione della corda d'ancoraggio.

(V = 1,1 m^3; $m_0 = 0,200kg$; $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$Pa; $T_0 = 20^0C$; $\rho_0 = 1,2kg\ m^{-3}$; $T_2 = 200^0C$)

Problema n. 2

Nel 1929 Ruchardt mise a punto un semplice esperimento per la misura del rapporto $\gamma = c_p/c_v$ per l'aria, dove c_p, c_v sono il calore specifico a pressione costante e volume costante, rispettivamente. In questa esperienza il gas viene racchiuso in un recipiente di volume V_0 che termina con un collo di sezione S in cui può scorrere una sferetta di massa m che funge da stantuffo. La pallina viene allontanata dalla posizione di equilibrio e viene misurato il periodo T di oscillazione. Se il periodo è sufficientemente breve perchè lo scambio di calore del gas con l'esterno possa considerarsi trascurabile, si può risalire da T a γ; come? (si trascuri l'attrito).

Problema n. 3

Il bungee jumping consiste nel lanciarsi da un luogo elevato (per esempio da un ponte) dopo essere stati imbracati con una corda elastica. Un'estremità della corda è fissata al corpo della persona che si lancia (in genere alle caviglie) e l'altra al punto da cui avviene il lancio. Questa pratica nasce come rituale dell'iniziazione nell'isola di Pentecoste, facente parte dell'arcipelago delle Isole Nuove Ibridi, a largo dell'oceano Pacifico. Al giorno d'ggi invece è diventata una pratica sportiva e viene vissuta come un gioco, per sfidare la forza di gravità e superare i propri limit. Un uomo di massa M=70 Kg si lascia cadere da un ponte alto $h = 49m$, agganciato ad una corda elastica di massa trascurabile che, per un allungamento $\Delta L > 0$, è assimilabile ad una molla di costante elastica k=1400N/m. Trascurando la resistenza dell'aria ed ogni altro attrito, calcolare:

1. quanto deve essere la lunghezza della corda perchè la minima distanza dal suolo durante il moto sia $z_{min} = 3m$;
2. la quota $z^\star$ alla quale viene raggiunta la massima velocità;
3. la velocità massima raggiunta $v^\star$;
4. i valori massimo R_{max} e minimo R_{min} del modulo della forza risultante R sull'uomo.