Soluzioni

Problema **n.1**

Area della **lunula** AGCF = Area AGC- Area AFC

Poichè ABC è un triangolo isoscele la mediana BD è anche altezza e bisettrice. Quindi l'angolo in D è retto. I triangoli ABC e BCD sono simili, quindi quest'ultimo sarà isoscele, il lato BD = DC.

Area AGC = $\pi DC^2/2$; Area AFC = Area BAFC-ABC;

Area BAFG = $\pi BC^2/4 = \pi DC^2/2$

Area ABC = $AC^2/2 = DC^2$

Area **lunula** = $\pi DC^2/2 - \pi DC^2/2 + DC^2 = \mathbf{DC^2}$ c.v.d.

Problema n.**2**

Se n è divisibile per 5 la soluzione sarà a = 0, b intero positivo.

Se n non è divisibile per 5 terminerà con una cifra diversa da 0 e 5. Se ad esso sottraiamo uno dei seguenti numeri multipli di tre: 3,9, 6,12 il numero n-3a terminerà con 0 o 5, quindi divisibile per 5. n-3a = 5b da cui n = 3a+5b. c.v.d.

Problema **n. 3**

$r = 8t/(t^2+4) = 8/(t+4/t)$ r è massimo se (t+4/t) è minimo

soluzione n,1

posto a = t e b = 4/t notiamo che il prodotto ab =4 non dipende da t.

Il nostro problema si riconduce a minimizzare al somma di due numeri il cui prodotto è costante.

Ricorrendo alla geometria elementare vogliamo trovare il rettangolo che ha il minor perimetro tra quelli che hanno la stessa area.

p/2=a+b A=ab; $y = a + b \Rightarrow y^2 = (a+b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \Rightarrow$

$y^2 = (a-b)^2 + 4ab$ poiché 4ab>0 il minimo si avrà se **a=b**.

soluzione n.2

Vogliamo trovare il minimo della somma p = a+b. Tale somma rappresenta il doppio della media aritmetica mentre $\sqrt{ab}$ è la media geometrica. Dalla relazione $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ il minimo di p corrisponde al segno di uguaglianza. Quindi avremo:

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = 4ab \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$$

Nel nostro caso t =4/t ovvero **t=2 s.**

Problema **n.4**
Imponendo l'equilibrio rispetto al punto A si ha:

$$b \times mg = 2T\left(r+\sqrt{l^2-b^2}\right) \Rightarrow T = \frac{mg\,b}{2\left(r+\sqrt{l^2-b^2}\right)} = \ \mathbf{166\ N}$$

seconda parte:
La traiettoria descritta dall'alpinista è un arco di ellisse, la sua espressione analitica è:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \quad \text{con} \quad -6 \le y \le -3,6$$

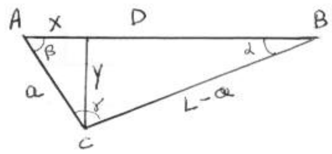
a) Se si prende la quota A come riferimento applicando il principio di conservazione dell'energia fra C ed il punto distante 5,4 m da A avremo:

$$-mgh_i = -mgh + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(h-h_i)}$$

ove h può essere calcolata dalla seguente relazione $h = \frac{2S}{D}$ S= area del triangolo formato dai due tratti della corda e dalla congiungente i punti di ancoraggio.

Per il calcolo dell'area si ricorre alla formula di Erone $S = \sqrt{p(p-D)(p-b)(p-c)}$
ove p è il semiperimetro del triangolo,b e c i lati del triangolo formati dalla corda.
h = 4,9 m ; da cui v = 5 m/s.

Il calcolo di h può essere condotto anche nel seguente modo:



$$\begin{cases} y^2 = a^2 - x^2 \\ y^2 = (L-a)^2 - (D-x)^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - x^2 = (L-a)^2 - (D-x)^2 \Rightarrow$$

$$2Dx = L^2 - 2aL - D^2 \Rightarrow x = \frac{L^2-2aL-D^2}{2D} \Rightarrow \qquad y = h = \frac{\sqrt{4a^2D^2-(L^2-2aL-D^2)^2}}{2D}$$

h= 4,9 m.

b) Nel punto centrale indicando con N la reazione della fune avremo:

$$N - mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N = mg + \frac{mv^2}{R} = 2T\cos\theta = 2T\,\frac{\sqrt{L^2-D^2}}{L}$$

da cui T risulta:

$$T = \frac{L}{2\sqrt{L^2-D^2}}\left(mg+\frac{mv^2}{R}\right) = \frac{mL}{2\sqrt{L^2-D^2}}\left(g+\frac{v^2\,2\sqrt{L^2-D^2}}{L^2}\right)$$

sostituendo v si ha:

$$T = \frac{mgL}{2L\sqrt{L^2-D^2}}\left(3L^2-2D^2-4h_i\sqrt{L^2-D^2}\right) \quad = \mathbf{736\ N}$$