IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
And
Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno
Premio Eduardo R. Caianiello
Prova del 26 febbraio 2016

Problema n.1

Si versa dell'acqua in un contenitore cilindrico in modo che il baricentro del sistema complessivo, contenitore più acqua, sia alla minima altezza possibile rispetto al fondo. Se h è l'altezza del pelo libero dell'acqua, a quale altezza h' si trova il baricentro del sistema? (La risposta può essere data o per via analitica o con un valido ragionamento).

Problema n. 2

La **balista** (ant. **ballista**, dal latino *ballista*, a sua volta derivato dal greco *ballistēs*, da *ballo* "tirare" meglio "lanciare") è una grande macchina d'assedio inventata dai Greci e usata soprattutto dai Romani. Lanciava grandi dardi o pietre sferiche singolarmente o per piccoli gruppi, secondo il tipo di modello.

È considerata l'arma più complessa costruita prima della rivoluzione industriale e l'unica arma pre-industriale ad essere stata progettata scientificamente.
In generale la balista si costruiva in legno, con qualche parte costruita o almeno rivestita di metallo e venivano utilizzate corde o tendini di animali come tensori. In origine le baliste funzionavano a tensione, in seguito il meccanismo divenne torsionale. La balista fu senza ombra di dubbio l'arma da lancio a lungo raggio più utilizzata e meglio progettata del periodo classico ed alto medievale. Il suo utilizzo è, tuttavia, cessato verso il tardo medioevo a causa degli alti costi per costruirla, arrivando a preferire macchine meno costose. Nel XV secolo, l'arrivo del cannone nello scenario europeo fece sì che la balista e le altre catapulte fossero relegate all'oblio.
Con una balista che può lanciare pietre sferiche con una gittata massima di 35 m si vuol colpire un bersaglio posto sulle mura di una fortezza all'altezza di 15 m dal suolo. A causa di un fossato posto a difesa della fortezza la balista deve essere piazzata, ad una distanza superiore a 40 metri dalle mura. Ciò rende impossibile colpire direttamente il bersaglio. Si ricorre perciò al seguente espediente. Si lanciano le pietre su un grosso masso alto 1 m posto a 15 m dalle mura, in modo da far rimbalzare elasticamente il proiettile. Determinare con che inclinazione e a che distanza dal masso deve essere posta la balista, sapendo che le pietre lasciano l'arma ad un metro dal suolo.

Problema n.3

La storia di Didone raccontata da Virgilio nell'Eneide

...mercatique solum, facti de nomine Byrsam, taurino quantum possent circumdare tergo. (...comprarono tanta terra quanto una pelle di toro potesse circondarne, per questo la città ha pure il nome di Birsa.) (Eneide, L. I, 367-368)

La leggenda narra che la regina fenicia Didone in fuga da Tiro approdò sulle coste dell'attuale Tunisia e chiese al re Jarba, proprietario di quelle terre, di vendergli un pezzo di terra su quelle coste per edificare una città. Il re rispose che le avrebbe regalato tutta la terra che lei fosse riuscita a circondare con una pelle di bue. Didone fece tagliare la pelle a strisce sottilissime con le quali formò un filo, quindi circondò la costa con il filo disposto a semicerchio e fondò la città di Cartagine. È chiaro che visto che la terra le veniva regalata doveva prenderne più che poteva. Ella si trovò a risolvere un problema, passato alla storia come Problema di Didone, formulato in termini matematici nel seguente modo:
Data una lunghezza L>0, tra tutte le curve piane di lunghezza L,contenente un tratto rettilineo, trovare quella che racchiude la massima area.
Il tratto rettilineo era ovviamente la spiaggia di Cartagine.

Mettiamo il caso che la leggenda di Didone sia vera in solo in parte e che ella dovesse racchiudere, con la stessa pelle di bue, un terreno che avesse la forma di **un parallelogramma**.

- **Come avrebbe disposto il filo?**

Problema n.4

Complex numbers and trigonometry

Any complex number z can be written as follows:

$$z = a + ib \qquad (1)$$

where a and b are real numbers and i is the imaginary unit, such that $i^2 = -1$. The importance of complex numbers was already known to Cardano and Tartaglia, two Italian mathematicians of the Renaissance period. However, only with Euler (1707, 1783) we had a systematic description of some fundamental properties of complex numbers. In fact, Euler showed that there exists the following relation between trigonometric and exponential functions:

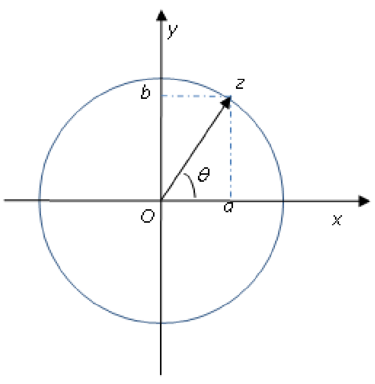

Figure 1 Representation of a complex number on a Cartesian Oxy-plane.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,, \qquad (2)$$

where $e = 2.718281828459\ldots$ is the transcendental Neper's number. On the other hand, by representing the complex number in the complex plane as in figure 1, we may set:

$$x = Re\{z\} = a\,; \quad y = Im\{z\} = b. \qquad (3)$$

In Eq. (3) the abbreviations Re and Im stand for "real part" and "imaginary part”, respectively. In this way, by noticing that complex numbers can be seen as vectors in a Cartesian Oxy-plane, we can set

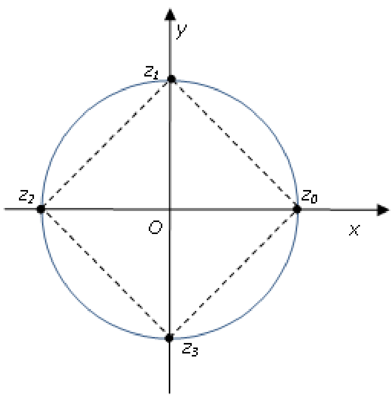

Figure 2 Roots of unity for *n=4*.

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} \tag{4}$$

where $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ is the modulus of z.

After this premise we would like to solve the following algebraic equation

$$z^n = 1\,. \tag{5}$$

Eq. (6) represents a *n*-th degree polynomial and has exactly n complex solutions, called “roots of unity”. We start by noticing that we can set $1 = e^{i2k\pi}$, with k integer, so that Eq. (5), because of Eq. (1), becomes:

$$|z|^n e^{in\theta} = e^{i2k\pi}. \tag{6}$$

In this way, we have $|z| = 1$ and $\theta_k = 2k\pi/n$. Therefore, the solutions lie on a circumference of radius $R = 1$ (the unit circle) placed at angles $\theta_k = 2k\pi/n$, with $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, with respect to the *x*-axis As an example, we consider the roots of unity for $n = 4$. In this case the four solutions can be found at the vertices of a square whose side is $L = \sqrt{2}$ and the angles θ_k ($k = 0, 1, 2, 3$) are the following:

$$\theta_0 = 0;\;\; \theta_1 = \frac{\pi}{2};\;\; \theta_2 = \pi;\;\; \theta_3 = \frac{3\pi}{2}. \tag{7}$$

a) Solve Eq. (6) for $n = 5$, representing he five solutions in the complex plane, as done for the case $n = 4$ in fig. 2.
b) Find the length a of the side of the regular figure obtained by joining the points representing the five solutions on the complex plane.