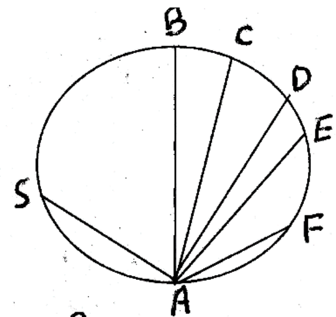
IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
And
Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno
Premio Eduardo R. Caianiello
Prova del 3 marzo 2017

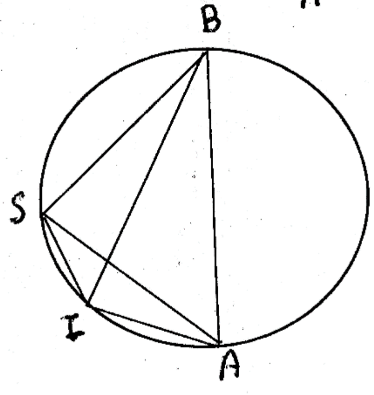
Problema n.1

Sei studenti che avevano partecipato al test di ammissione in un prestigioso collegio universitario, ricorsero verso l'esito negativo ritenendo ingiusta la loro esclusione. Il Rettore, esaminato il caso, decise di poterli ammettere se avessero superato la seguente prova.
Agli studenti, convocati per il giorno successivo nel cortile dell'Ateneo, dopo essersi disposti in fila uno di seguito all'altro, sarebbe stato posto sulla loro testa un cappello bianco o nero. Partendo dall'ultimo se, cinque di loro, avessero indovinato il colore del proprio cappello sarebbero stati tutti ammessi.
Tenendo presente che ognuno di loro poteva vedere solo il colore dei cappelli di quelli che lo precedevano. Quale fu la strategia che i sei concordarono per poter ottenere l'ammissione?

Problema n.2

Galileo Galilei nel 1638 pubblicò nei Paesi Bassi un grande trattato scientifico dal titolo ***Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la mecanica e i moti locali*** grazie al quale lo si considera il ***padre della scienza moderna***. Il trattato è organizzato come un dialogo che si svolge in quattro giornate fra i tre medesimi protagonisti del precedente ***Dialogo dei massimi sistemi*** (Sagredo, Salviati e Simplicio).
Nella prima giornata, Galileo tratta della resistenza dei materiali, nella seconda si occupa della statica, nella terza e nella quarta si occupa della dinamica, stabilendo le leggi del moto uniforme, del moto naturalmente accelerato e delle oscillazioni del pendolo.
Precedentemente Galileo in una lettera del 29/11/1602, aveva comunicato al marchese Guidobaldi del Monte, autorevole studioso di meccanica, le seguenti dimostrazioni:





a) *Sia del cerchio BDA il diametro BA eretto all'orizonte,* (ovvero cerchio posto in un piano verticale) *e dal punto A sino alla circonferenza tirate linee utcumque AF, AE, AD, AC; dimostro,* ***mobili uguali cadere in tempi uguali e per la perpendicolare BA e per piani inclinati secondo le linee CA, DA, EA, FA;*** *sicchè, partendosi nell'istesso momento dalli punti B,C,D,E,F, arriveranno in uno stesso momento al termine A, e sia la linea FA piccola quant'esser si voglia.*

b) *E forse anco più inopinabile parerà questo, pur da me dimostrato, che essendo la linea SA non maggiore della corda d'una quarta,*(quarto della circonferenza) *e le linee SI, IA utcumque,* ***più presto fa il medesimo mobile il viaggio SIA,***

partendosi da S, che il viaggio solo IA, partendosi da I.

Si dimostrino tali affermazioni di Galileo ed il seguente teorema, riportato nella terza giornata del suo trattato.

c) TEOREMA 19. **Se da un punto di una linea orizzontale scende una perpendicolare e da un altro punto, preso sulla medesima orizzontale, si deve condurre fino alla perpendicolare un piano inclinato, sul quale il mobile impieghi il tempo più breve per scendere fino alla perpendicolare; tale piano sarà quello che stacca dalla perpendicolare un tratto eguale alla distanza che intercorre tra il punto preso sull'orizzontale e l'estremo della perpendicolare.**

Problema n.3

A "trigonometric carousel"

The conic pendulum (see fig. 1) is a well-known mechanical system. One of its peculiarities is that the point-like mass m, hanging from an inextensible and massless string of length l, follows a circular path with non-null radius R only if the angular frequency ω, with which the conic pendulum is made to swirl around, is such that $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$, where g is the acceleration due to gravity. From fig. 1 one can see that $R = l\sin\theta$, where θ is the angle the string makes with the vertical. This angle can be obtained by writing Newton's second law:

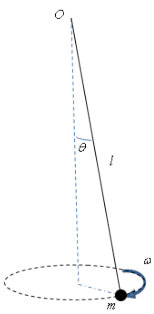


Fig. 1 A conic pendulum.

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}, \qquad (1)$$

where $\vec{T}$ is the tension in the string and $\vec{a} = \vec{a}_c$ is the centripetal acceleration, with modulus $a_c = \omega^2 R = \omega^2 l \sin\theta$. By looking at the free-body diagram in fig. 2, we can write the following two equations, one for each component:

$$T\sin\theta = ma_c, \qquad (2a)$$

$$T\cos\theta = mg. \qquad (2b)$$

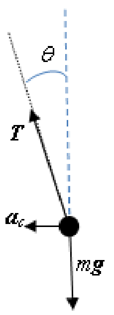


Fig. 2 Free-body diagram for the conic pendulum in fig. 1.

In this way, by dividing Eq. (2a) by Eq. (2b) and by considering the expression for a_c, we have:

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}. \qquad (3)$$

This equation has an acceptable solution only if $0 < \frac{g}{\omega^2 l} \le 1$. Furthermore, we see that the condition:

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (4)$$

must be fulfilled in order to have a non-null value of R.

A variation on the theme of the conic pendulum is the “trigonometric carousel” shown in fig. 3. Here the radius R of the circumference that each point particle on the carousel describes is given by the following expression:

$$R = a + l\sin\theta, \tag{5}$$

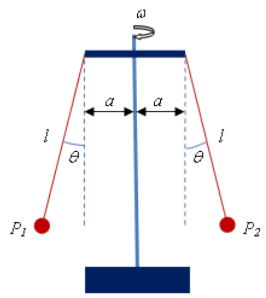


Fig. 3 A “trigonometric carousel”.

where a is the radius of the wheel on which the strings sustaining each point particle is attached, as shown in fig. 3 only for point particles P_1 and P_2. The free-body diagram for each point particle on the carousel is the same as in fig. 2, so that the same equations as in (2a) and (2b) can be written. In this case, however, the modulus of the centripetal acceleration is the following:

$$a_c = \omega^2(a + l\sin\theta). \tag{6}$$

a) Show that, in order to find the angle in this case, we need to solve the following trigonometric equation:

$$\boldsymbol{\tan\theta = A(\sin\theta + k),} \tag{7}$$

where $A = \frac{\omega^2 l}{g}$ and $k = \frac{a}{l}$.

b) Show that, for small values of the angle θ, for which the tangent and the sine can be appropriately approximated by their arguments, the solution to Eq. (7) is the following:

$$\boldsymbol{\theta \approx \frac{Ak}{1-A} = \frac{\omega^2 a}{g-\omega^2 l}}. \tag{8}$$

Discuss (in English) this result on the basis of the hypothesis made (small angles).

c) Show that, when we set $t = \tan\frac{\theta}{2}$, the trigonometric equation (7) reduces to the following fourth-degree algebraic equation for $Ak \neq 0$:

$$\boldsymbol{t^4 + 2\,\frac{1+A}{Ak}t^3 + 2\,\frac{1-A}{Ak}t - 1 = 0.} \tag{9}$$