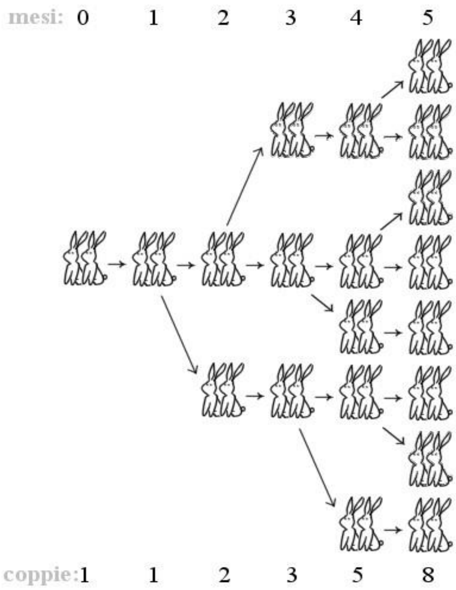
IIASS
International Institute for Advanced Scientific Studies
and
Dipartimento di Fisica "E.R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno

Premio Eduardo R. Caianiello
Prova del 16 febbraio 2018

Problema n. 1

Leonardo Pisano, detto Fibonacci (Fibonacci sta per *filius Bonacii*) nacque a Pisa intorno al 1170. Il padre si interessò della sua istruzione; in particolare, egli curò l'apprendimento delle tecniche del calcolo, specialmente quelle che riguardavano le cifre indo-arabiche, che non erano ancora state introdotte in Europa. Leonardo colse l'opportunità offertagli dai suoi viaggi all'estero per studiare e imparare le tecniche matematiche impiegate in queste regioni. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove, per i successivi 25 anni, lavorò alle sue personali composizioni matematiche.



Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia assistette a un singolare torneo tra abacisti e algoritmisti: in quella gara infatti si dimostrò che col metodo posizionale indiano appreso dagli arabi si poteva calcolare più velocemente di qualsiasi abaco. Questo il problema proposto, tratto dal *Liber Abaci* di Fibonacci: «*Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.*»

Lo stesso Fibonacci vinse la gara dando al test una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. Di seguito si riporta la soluzione, in sintesi.

Il primo mese c'è solo una coppia di conigli, il secondo mese ce ne sono 2 di cui una fertile, il terzo ce ne sono 3 di cui 2 fertili, il quarto mese ce ne sono 5 di cui 3 fertili, il quinto mese ce ne sono 8 di cui 5 fertili e così via.

Nasce così la celebre successione di Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

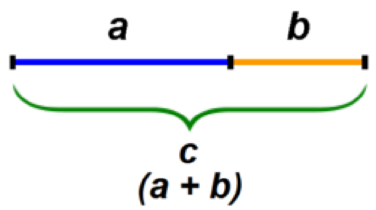
* i primi 2 elementi sono 1, 1;
* ogni altro elemento è dato dalla somma dei due che lo precedono.

Indicando con $F(n)$ il numero che occupa il posto ennesimo, la successione diventa:

* $F(1) = 1$;
* $F(2) = 1$;
* $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, per $n > 2$.

In base a questa definizione si assume convenzionalmente $F(0) = 0$, affinchè la relazione ricorsiva $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ sia valida anche per $n = 2$.

La successione di Fibonacci ha portato ad approfondire moltissimi ambiti della matematica e delle scienze naturali. Tuttavia, pur avendo scoperto questa importante successione, Fibonacci non ne colse molti aspetti. Solo quattro secoli più tardi, Keplero osservò che il rapporto tra due termini successivi tendeva al numero aureo. Ricordiamo che la sezione aurea (o numero aureo o costante di Fidia) è il rapporto tra la lunghezza c di un dato segmento e la lunghezza a di una parte del segmento stesso, quando a è media proporzionale tra la lunghezza c dell'intero segmento e la lunghezza b della restante parte. Ponendo allora $\varphi = \frac{c}{a}$, possiamo scrivere:



$$c : a = a : b \rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \rightarrow 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi.$$

Ossia, possiamo definire la sezione aurea attraverso la soluzione positiva dell'equazione algebrica seguente:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Dopo tale premessa si risolva il seguente problema.

Se si indicano con s e t le soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$, dove $s > 0$ e $t < 0$, e con $F(n)$ l'ennesimo numero di Fibonacci, si dimostri che

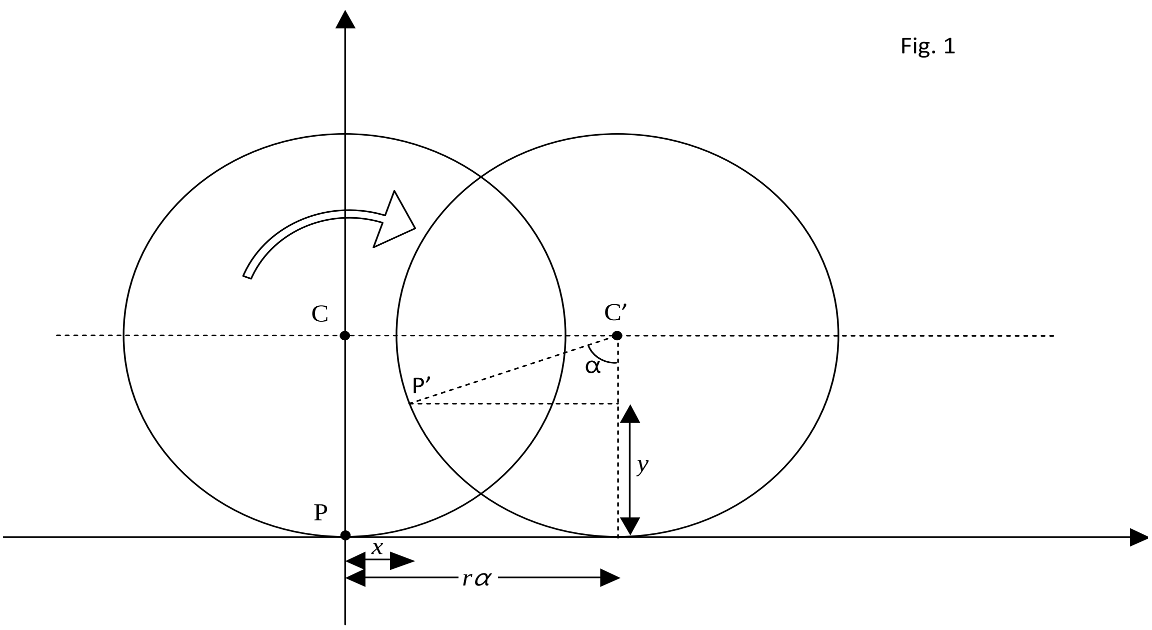
$$\boldsymbol{F(n) = \frac{s^n - t^n}{\sqrt{5}}}$$

e che il limite del rapporto tra due numeri di Fibonacci consecutivi è uguale a s (sezione aurea).

Problema n. 2

La cicloide, curva dalle molte proprietà.

Fig. 1



La cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza mentre questa rotola su una retta. La cicloide fu studiata per la prima volta da Nicola Cusano e ricevette il suo nome nel 1599 da Galileo, che formò il nome *kykloeidés* utilizzando le parole greche *kýklos* (cerchio) e *oeidés* (forma), che vuol dire quindi "fatto da un cerchio". Si dedicarono allo studio di questa curva anche (tra i più celebri) Torricelli, Fermat, Cartesio, Huygens, Bernoulli e Isaac Newton.

Per ricavare le equazioni della cicloide scegliamo l'asse x come asse su cui rotoli la circonferenza. Inoltre poniamo che la posizione iniziale della circonferenza sia con il centro sull'asse y e che il punto che descriverà la cicloide sia nell'origine, come in fig. 1. Dopo che la ruota avrà ruotato di un angolo α il punto $P(0,0)$ si sarà portato in $P'(x,y)$, le cui coordinate si possono ricavare dal disegno in fig. 1.

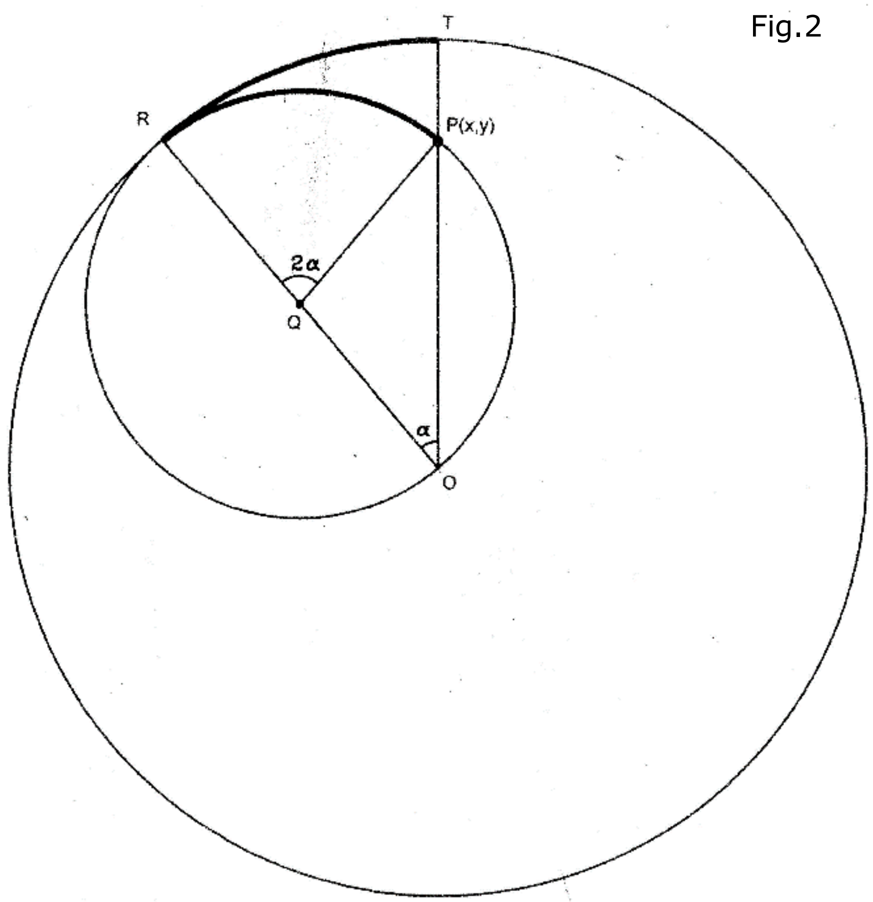
Pertanto si ha:

$$x = r\alpha - r sin\alpha = r(\alpha - sin\alpha) \qquad (1a)$$

$$y = r\cos 0 - r\cos\alpha = r(1-\cos\alpha) \qquad (1b)$$

Le equazioni (1a-b) sono le equazioni parametriche della cicloide.

Fig.2



Consideriamo adesso la seguente variante già studiata da Nasir al-Din al-Tusi, grande figura di matematico, filosofo, teologo, astronomo del mondo islamico, vissuto nel 1200.

Un qualsiasi punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ di una circonferenza di raggio $\boldsymbol{R}$, mentre questa rotola a velocità angolare costante, in una circonferenza di raggio $\boldsymbol{2R}$, rimanendole tangente internamente, si muoverà di moto rettilineo armonico.

Si dimostri tale proposizione utilizzando, possibilmente, metodologie della geometria euclidea. Si scelga il sistema di riferimento con l'origine in O, l'asse y nella direzione OT e l'asse x in direzione perpendicolare. Si assuma che a $t = 0$ il punto P coincida con il punto T.

Problema n. 3

The kinematic fountain

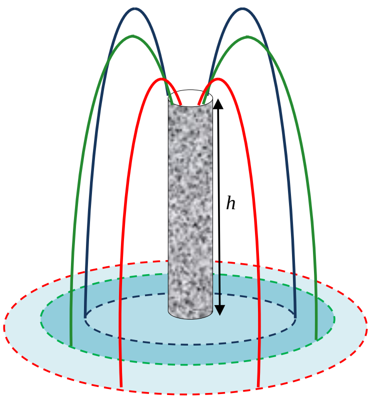


Fig. 1 Pictorial representation of the "kinematic fountain".

In a colored "kinematic fountain" water springs out at a speed v_0 from three different types of orifices, placed at an height h with respect to the water level, as shown in fig. 1. The three types of orifices differ in the inclination angle θ_k $(k = 1, 2, 3)$ in the following way: θ_1 for the red stream, θ_2 for the green stream, and θ_3 for the blue stream, with

$$\theta_3 > \theta_2 > \theta_1. \qquad (1)$$

Consider that no wind is present and that the friction due to air can be neglected.

a) Show that the trajectories followed by water particles of the three different streams can be written as follows:

$$y = h + \tan\theta_k\, x - \frac{g}{2\,v_0^2}(1 + \tan^2\theta_k)\, x^2, \qquad (2)$$

where $k = 1, 2, 3$, g is the acceleration due to gravity, and the axes are chosen in such a way to contain the entire trajectory as in fig. 2, where we notice that the x −axis runs along the water level of the fountain.

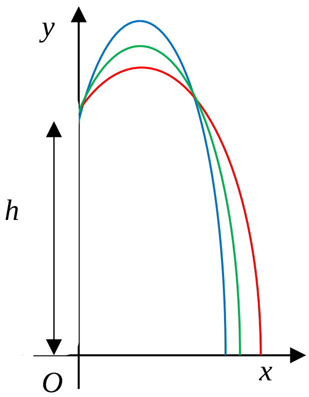


Fig. 2 Choice of axes in representing the trajectories of the water streams. Notice that all water streams have been rotated in such a way that their trajectories can be shown in a single Oxy coordinate system.

b) Show that the maximum heights H_k $(k = 1, 2, 3)$ reached by the three water streams are given by the following expression:

$$H_k = h + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta_k. \qquad (3)$$

c) By setting to zero the expression for y in Eq. (2), show that the distances d_k $(k = 1, 2, 3)$ at which the three streams reach the water level can be expressed as follows:

$$d_k = \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_k\cos\theta_k\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta_k}}\right). \qquad (4)$$

A method for finding the optimum angle θ^* at which the maximum possible horizontal distance d_{max} can be covered by the stream of water at fixed values of v_0 is as follows.

d) By inserting $x = d_{max}$ and $y = 0$ in Eq. (2), first show that the same equation can be written in the following form:

$$t^2 - \frac{2\,v_0^2}{g\,d_{max}}t + 1 - \frac{2\,v_0^2 h}{g\,d_{max}^2} = 0, \qquad (5)$$

where $t = \tan\theta^*$.

e) Next, by excluding the possibility of two solutions for the optimum angle θ^*, show that one can find, from Eq. (5), the following expression for d_{max}:

$$d_{max} = \frac{v_0\,v_f}{g}, \qquad (6)$$

where $v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ is the velocity of the water particles right before arriving at the water level.

f) Finally, by substituting Eq. (6) into Eq. (5), show that:

$$\theta^* = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{v_f}\right). \qquad (7)$$