

Fili, finiti e infiniti, uniformemente carichi

Roberto De Luca
 DIIMA - Università degli Studi di Salerno
 84084 Fisciano (SA)

1. Introduzione

La legge di Gauss in elettrostatica [1] è vista, nelle sessioni di esercitazioni di un corso introduttivo di elettromagnetismo, come un mezzo molto utile per la risoluzione di problemi che presentano una simmetria cilindrica o sferica. In questi corsi la derivazione dell'espressione del campo elettrico, generato da una carica uniformemente distribuita su di un filo sottile infinito, viene generalmente presentata come una delle applicazioni della legge di Gauss. L'espressione che ne deriva, detta λ la densità lineare di carica, è la seguente [1]:

$$\mathbf{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \hat{\rho} \quad (1)$$

ove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, ρ è la distanza del punto P , nel quale si vuole calcolare il campo elettrico \mathbf{E} , dal filo infinito e $\hat{\rho}$ è il vettore unitario nella direzione ρ , definita analogamente alla coordinata radiale in un sistema di coordinate cilindriche. Se siamo in presenza di un filo finito, come sempre avviene nella realtà, non possiamo più utilizzare l'Eq. 1 e siamo costretti ad un calcolo del campo elettrico un po' tedioso, passando attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti in elettrostatica. Vero è che potremmo fare a meno di alcuni di questi calcoli, partendo dall'espressione del potenziale elettrostatico, ma qui useremo questa seconda strada solo per una prova della validità del risultato ottenuto.

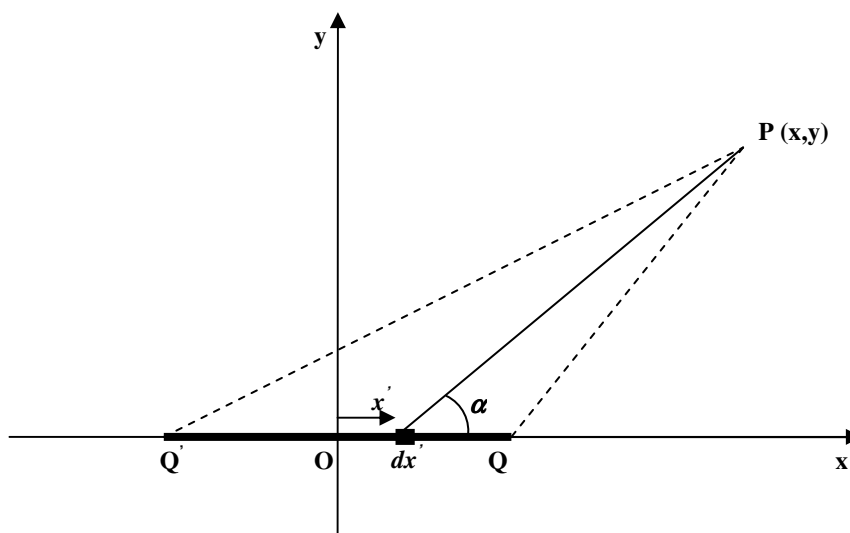


Fig.1 Un filo finito $Q'Q$ uniformemente carico. P è il punto, di coordinate generiche (x,y) nel quale si vuole calcolare il campo elettrico \mathbf{E} .

In questo lavoro, pertanto, vedremo come calcolare, in generale, il campo elettrico generato da un filo rettilineo finito in tutto lo spazio, cercando di cogliere alcuni aspetti legati ai casi semplici, trattati con dovizia di particolari in molti libri di testo. Vedremo che lo sforzo analitico nel trattare il problema nel caso più generale è del tutto simile a quello che si compie quando si affrontano i casi semplici, che qui vengono considerati come casi particolari

della trattazione generale. Per questa ragione, dunque, sembrerebbe più opportuno affrontare il

problema partendo dal caso più generale, facendo notare, infine, che il risultato del teorema di Gauss dell'Eq. 1 viene recuperato nel limite $\rho \ll L$.

2. Un filo finito

Consideriamo un filo sottile $Q'Q$ (Fig. 1), di lunghezza finita L , sul quale è uniformemente distribuita una carica q , cosicché la densità lineare di carica sul filo risulta essere $\lambda = q/L$. Vogliamo calcolare il campo elettrico \mathbf{E} prodotto da questa distribuzione di carica nel punto P di coordinate generiche (x, y) , avendo scelto un sistema di riferimento come in Fig. 1, ove il filo giace lungo l'asse x e l'asse y coincide con l'asse del segmento $Q'Q$. Svolgiamo qui il calcolo di \mathbf{E} su di un piano cartesiano sia per semplicità di trattazione, sia perché lo studente è più aduso a questo sistema di coordinate, piuttosto che ad un sistema di coordinate cilindriche. La generalizzazione dei risultati a tutto lo spazio ci fornirà la risposta cercata.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo dire che il campo elettrico in P è la somma di tutti i contributi infinitesimi $d\mathbf{E}$, dati dagli elementini di filo dx' , sui quali è presente una carica $dq' = \lambda dx'$. Per il campo elementare $d\mathbf{E}$ possiamo allora scrivere:

$$d\mathbf{E} = dE_x \hat{\mathbf{x}} + dE_y \hat{\mathbf{y}} = dE \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + dE \sin \alpha \hat{\mathbf{y}} \quad (2)$$

ove $dE = \frac{k\lambda dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}$. Pertanto, l'Eq. 2 si può scrivere, in termini delle componenti del campo elettrico, come segue:

$$E_x(x, y) = k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{(x-x')}{[(x-x')^2 + y^2]^{3/2}} dx', \quad (3a)$$

$$E_y(x, y) = k\lambda y \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{[(x-x')^2 + y^2]^{3/2}} dx'. \quad (3b)$$

Si tratta adesso di risolvere gli integrali di sopra. Per risolvere il primo integrale, dato dalla (3a), possiamo porre $\mu = (x-x')^2 + y^2$ e $\mu_{\pm} = \left(x \mp \frac{L}{2}\right)^2 + y^2$, cosicché possiamo scrivere

$$E_x(x, y) = \frac{k\lambda}{2} \int_{\mu_+}^{\mu_-} \frac{1}{\mu^{3/2}} d\mu = k\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_+}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_-}} \right). \quad (4)$$

Sostituendo per μ_+ e μ_- , infine si ha:

$$E_x(x, y) = k\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(x-L/2)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+L/2)^2 + y^2}} \right). \quad (5)$$

Questa espressione ha anche validità sull'asse x , eccetto per i punti di ascissa $x_{\pm} = \pm \frac{L}{2}$, dove E_x diverge. Vedremo in seguito, però, che, sebbene la componente E_x del campo elettrico esista anche all'interno della distribuzione di carica, non è possibile definire il campo elettrico \mathbf{E} , in quanto, per $x \in [-L/2, L/2]$ e $y=0$, la componente E_y presenta una discontinuità di secondo tipo in tutti i punti ove è presente la carica elettrica.

Per calcolare ora il secondo integrale, escludendo i punti sull'asse x , poniamo $(x-x') = y \cot \alpha$ così come la stessa Fig. 1 ci suggerisce. Notiamo allora che

$$(x-x')^2 + y^2 = \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} \quad \text{e} \quad dx' = \frac{y}{\sin^2 \alpha}.$$

Mediante questa sostituzione, l'integrale nella (3b) prenderà la seguente semplice forma

$$E_y(x, y) = \frac{k\lambda}{y} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{k\lambda}{y} (\cos \alpha_- - \cos \alpha_+), \quad (6)$$

ove $\cos \alpha_{\pm} = \frac{x \mp L/2}{\sqrt{(x \mp L/2)^2 + y^2}}$. Per passare dalla (3b) alla (6), bisogna tener conto di alcuni

aspetti. Innanzitutto, si nota che l'angolo α , sul quale si integra, è tale che $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$. In secondo

luogo si può vedere che il rapporto $\sin \alpha / y$ mantiene sempre il segno positivo a destra dell'elementino dx' , qualunque $y \neq 0$, mentre, a sinistra dell'elementino dx' , ha sempre segno negativo. Si vede allora che la scrittura dell'integrale nell'Eq. 6 è valida per ogni punto nel piano che non giaccia sull'asse x . Operando le sostituzioni per $\cos \alpha_+$ e $\cos \alpha_-$, infine scriviamo:

$$E_y(x, y) = \frac{k\lambda}{y} \left(\frac{x+L/2}{\sqrt{(x+L/2)^2 + y^2}} - \frac{x-L/2}{\sqrt{(x-L/2)^2 + y^2}} \right). \quad (7)$$

Abbiamo così ottenuto il campo elettrico \mathbf{E} nel piano x - y . Questo calcolo è sufficiente per definire \mathbf{E} in tutto lo spazio, in quanto possiamo ottenere, per ogni punto P esterno alla distribuzione di carica e non appartenente all'asse x , il campo \mathbf{E} su ogni punto della circonferenza di raggio y , ottenuta facendo ruotare il punto P rispetto all'asse x . Con ciò stiamo dicendo che l'espressione del campo elettrico può essere ottenuta passando dalle coordinate cartesiane x e y , alle coordinate cilindriche, ove si ponga $x=z$ e $y=\rho$ nella (5) e nella (7). Notiamo allora che, per via dell'invarianza rotazionale dell'espressione di \mathbf{E} , l'espressione finale del campo elettrico in coordinate cilindriche non dipende dall'angolo di azimut φ .

Dalla nostra discussione sul calcolo di E_y abbiamo però escluso i punti che giacciono sull'asse x . E' opportuno, per questi punti, fare alcune considerazioni. Innanzitutto notiamo che, sull'asse x e per punti al di fuori della distribuzione di carica, ovvero per $x \notin [-L/2, L/2]$ e per $y=0$, dobbiamo avere, per l'Eq. 3b,

$$E_y(x, 0) = 0. \quad (8)$$

Il comportamento di E_y su tutto l'asse x può essere ottenuto dall'Eq. 7 mediante un processo di limite. Per ottenere questo risultato, sviluppiamo in serie di Taylor, per piccoli valori di y , i due addendi nelle parentesi quadre dell'Eq. 7 e scriviamo, al secondo ordine in y ,

$$E_y(x, y) \cong \frac{k\lambda}{y} \left\{ (x + L/2) \left[\frac{1}{|x + L/2|} - \frac{y^2}{2|x + L/2|^3} \right] - (x - L/2) \left[\frac{1}{|x - L/2|} - \frac{y^2}{2|x - L/2|^3} \right] \right\}. \quad (9)$$

Definendo adesso $sign(\eta) = \frac{\eta}{|\eta|}$, scriviamo

$$E_y(x, y) \cong \frac{k\lambda}{y} \left\{ sign(x + L/2) \left[1 - \frac{y^2}{2(x + L/2)^2} \right] - sign(x - L/2) \left[1 - \frac{y^2}{2(x - L/2)^2} \right] \right\}. \quad (10)$$

Attraverso l'espressione approssimata di E_y data nell'Eq. 10, possiamo calcolare il limite per $y \rightarrow 0$ di questa componente in modo più immediato. Infatti, per $x \notin [-L/2, L/2]$, si ha che

$$sign(x + L/2) = sign(x - L/2) = \pm 1, \quad (11)$$

ove il segno + è relativo all'intervallo $x > L/2$, e il segno - all'intervallo $x < -L/2$, cosicché

$$E_y(x, y) \cong \pm \frac{kqxy}{(x^2 - L^2/4)^2} = \frac{kq|x|y}{(x^2 - L^2/4)^2}. \quad (12)$$

In questa espressione notiamo chiaramente che, per $y \rightarrow 0$, la componente del campo elettrico nella direzione y si annulla. Notiamo ancora che la (12) prevede divergenza della componente E_y del campo elettrico in prossimità degli estremi Q' e Q . Questo comportamento, tuttavia, è più correttamente deducibile dall'Eq. 7, quando fissiamo il valore di x a $\pm L/2$ e facciamo successivamente tendere y a zero.

Diversa è la situazione per $x \in (-L/2, L/2)$; infatti, in questo caso, si ha:

$$sign(x + L/2) = -sign(x - L/2) = 1, \quad (13)$$

cosicché

$$E_y(x, y) \cong \frac{k\lambda}{y} \left[2 - \frac{y^2(x^2 + L^2/4)}{2(x^2 - L^2/4)^2} \right]. \quad (14)$$

Per piccoli valori di y , e per punti abbastanza lontani dagli estremi Q' e Q , otteniamo allora

$$E_y(x, y) \cong \frac{2k\lambda}{y} \quad (15)$$

e, pertanto, E_y diverge per $y \rightarrow 0$.

Notiamo qui che l'Eq. 15 dà un risultato simile a quello che si ottiene mediante applicazione della legge di Gauss quando si assume che il filo sia molto più lungo della distanza $|y|$, in modo tale da considerare il filo stesso come infinito. In questo limite, infatti, non è necessario sviluppare in serie di Taylor i termini nelle parentesi quadre nell'Eq. 7, ma si può trascurare, sotto il simbolo di radice, il termine y^2 rispetto alle grandezza $(x + L/2)^2$ ed $(x - L/2)^2$, sempre che ci manteniamo

sufficientemente lontano dagli estremi Q e Q' della distribuzione di carica. Quando facciamo ciò otteniamo

$$E_y \cong \frac{k\lambda}{y} [\text{sign}(x+L/2) - \text{sign}(x-L/2)], \quad (16)$$

che, per la (13), si riduce alla (15). Notiamo ancora che, per $x=0$, $E_x=0$ qualsiasi il valore di y . Pertanto, tenendo presente la (16), per piccoli valori di y si ha

$$\mathbf{E}(0, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \hat{\mathbf{y}}, \quad (17)$$

cosicché viene recuperato, con la sostituzione $y=\rho$, il risultato completo dell'Eq. 1, ottenuto mediante applicazione della legge di Gauss. Per $x \in (-L/2, L/2)$ e $x \neq 0$, invece, il valore di E_x è ottenibile, per piccoli valori di x , mediante lo stesso procedimento illustrato sopra, e si ha

$$E_x(x, y) \cong \frac{k\lambda}{L^2/4 - x^2} \left[x - \frac{y^2(x^3 + L^3/8)}{2(x^2 - L^2/4)^2} \right]. \quad (18)$$

Questa espressione diventa indipendente da y per $y \rightarrow 0$, cosicché, in questo limite scriviamo

$$E_x(x, 0) \cong \frac{k\lambda x}{L^2/4 - x^2}. \quad (19)$$

Notiamo però che, anche se la componente E_x esiste ed è finita per $x \in (-L/2, L/2)$ e per $y=0$, ciò non è sufficiente per definire il campo elettrico nello stesso intervallo, in quanto E_y diverge, così come abbiamo visto prima. Al contrario, per $x \notin [-L/2, L/2]$ e per $y=0$, otteniamo, per quanto detto sopra e coerentemente con la (5),

$$\mathbf{E}(x, 0) = \pm \frac{k\lambda L}{x^2 - L^2/4} \hat{\mathbf{x}}, \quad (20)$$

ove il segno + è relativo all'intervallo $x > L/2$, e il segno - all'intervallo $x < -L/2$.

3. Verifica del risultato attraverso il calcolo del potenziale elettrostatico

Calcoliamo adesso il potenziale elettrostatico $V(P)$, prodotto dalla distribuzione di carica in Fig. 1, nel punto P . Considerando un elementino del segmento $Q'Q$ di lunghezza dx' , scriviamo il contributo dovuto $dV(P)$ dovuto alla carica $dq' = \lambda dx'$ su di esso come segue

$$dV(P) = k\lambda \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}. \quad (21)$$

Pertanto, il potenziale $V(P)$ sarà dato dalla seguente espressione:

$$V(P) = k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}. \quad (22)$$

Effettuando adesso la sostituzione $(x-x') = y\xi$, otteniamo

$$V(P) = k\lambda \int_{\xi_+}^{\xi_-} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = k\lambda \left[\sinh^{-1} \left(\frac{x+L/2}{y} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{x-L/2}{y} \right) \right], \quad (23)$$

ove gli estremi di integrazione nel primo integrale sono $\xi_{\pm} = \frac{x \mp L/2}{y}$. Avendo ottenuto l'espressione del potenziale elettrostatico nella (23), possiamo adesso calcolare il campo elettrico attraverso le seguenti relazioni, valide nel caso dell'elettrostatica:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (24)$$

Notiamo allora che, se $y \neq 0$, le espressioni di E_x e E_y ottenute nella (5) e nella (7), rispettivamente, sono confermate. Per $y=0$, invece, come fatto prima, dobbiamo usare molta cautela per il calcolo del campo elettrico a partire dall'Eq. 23. In questo caso il calcolo potrà procedere come segue. Assumiamo che $y \neq 0$, e ricaviamo l'espressione per le componenti E_x e E_y del campo elettrico date dalla (5) e dalla (7), rispettivamente. A questo punto distinguiamo tra i due diversi intervalli sull'ascissa, ovvero l'intervallo $[-L/2, L/2]$ e il suo complementare. Una volta fatta questa distinzione, si procede come fatto prima, ottenendo la (20) per $x \notin [-L/2, L/2]$ e notando di nuovo che il limite per $y \rightarrow 0$ non esiste per $x \in [-L/2, L/2]$ per la componente E_y , cosa che è sufficiente a farci dire che non è possibile definire il valore del campo \mathbf{E} proprio sulla distribuzione di carica.

4. Conclusioni

Abbiamo considerato il campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita su di un filo sottile finito, che abbiamo preso giacente lungo l'asse x di una terna di assi cartesiani. Data la simmetria del problema, abbiamo potuto calcolare il campo \mathbf{E} nel piano x - y , ottenendo poi la sua espressione in tutto lo spazio mediante una trasformazione dalle coordinate cartesiane alle coordinate cilindriche. Alcune proprietà analitiche delle soluzioni sono state considerate in dettaglio.

Il presente approfondimento didattico è utile innanzitutto perché in esso è proposto un esempio in cui, in uno dei casi limite, è possibile recuperare il risultato ottenuto attraverso l'applicazione della legge di Gauss ad un filo infinito uniformemente carico. In secondo luogo, la soluzione del problema, ottenibile mediante metodi di integrazione usuali, si presta ad una discussione in cui vengono utilizzati ulteriori concetti legati all'analisi matematica. Infine, la breve verifica del risultato attraverso il calcolo del potenziale elettrostatico dà modo allo studente di ricorrere ancora una volta agli strumenti di analisi matematica, rendendo così l'ultima parte della presente trattazione utile come esercizio, nel quale l'aspetto interdisciplinare non è secondario.

Bibliografia

- [1] P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, *Fisica*, Vol. II, Ed. EdiSes (1998).